Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2026.154

TÍNH NỬA LIÊN TỤC DƯỚI THÀNH PHẦN VÀ MỘT CÁCH TIẾP CẬN MỚI VỚI NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND CHO HÀM KHOẢNG

Trần Phúc Minh, Võ Giang Nam, Trương Kim Hân, Nguyễn Thị Xuân Dương, Lê Cát Tường và Đinh Ngọc Quý*
Khoa Toán học, Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): dnquy@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 11/11/2025
Sửa bài (Revised): 12/12/2025
Duyệt đăng (Accepted): 08/07/2026

Title: *Partial lower semicontinuity and a new approach to Ekeland's variational principle for interval-valued functions*

Author(s): *Tran Phuc Minh, Vo Giang Nam, Truong Kim Han, Nguyen Thi Xuan Duong, Le Cat Tuong and Dinh Ngoc Quy**

Affiliation(s): *Department of Mathematics, College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, một khái niệm giảm nhẹ của tính nửa liên tục dưới cho hàm có giá trị khoảng đã được đề xuất, được gọi là tính nửa liên tục dưới thành phần. Trên cơ sở giả thiết nửa liên tục dưới của hàm mục tiêu được giảm nhẹ, các phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng trong không gian mêtric đủ đã được đề xuất. Các kết quả đạt được là hoàn toàn mới, đồng thời mở rộng các kết quả công bố gần đây trong lĩnh vực liên quan. Để làm sáng tỏ ý tưởng, nhiều ví dụ cụ thể đã được cung cấp trong nghiên cứu nhằm giúp người đọc dễ dàng hình dung và nắm bắt bản chất của các khái niệm và kết quả mới.

Từ khóa: *Hàm có giá trị khoảng, nguyên lý biến phân Ekeland, tính nửa liên tục dưới thành phần*

ABSTRACT

This paper proposes a concept that is considerably lighter than the previously studied lower semicontinuous forms of interval-valued functions, termed partial lower semicontinuity. Based on a relaxed assumption of the lower semicontinuity for the objective function, extended versions of Ekeland's variational principle for interval-valued functions in complete metric spaces are proposed. The obtained results are entirely new and extend recently published results in related fields. To clarify the ideas, the paper provides numerous specific examples, helping readers easily visualize and grasp the essence of the new concepts and results.

Keywords: *Interval-valued functions, Ekeland's variational principle, partial lower semicontinuity*

1. GIỚI THIỆU

Trong các bài toán tối ưu thực tế, việc tìm kiếm nghiệm gần đúng rất được quan tâm khi tính toán nghiệm chính xác gặp khó khăn. Nhằm xác định sự tồn tại của các điểm xấp xỉ cực trị, nguyên lý biến phân Ekeland (Ekeland, 1974) đã trở thành một công cụ cơ bản và quan trọng trong giải tích biến phân lẫn lý thuyết tối ưu. Đóng vai trò hạt nhân trong lĩnh vực, nguyên lý này có mối liên hệ chặt chẽ với nhiều kết quả toán học tương đương như Định lý tồn tại nghiệm của phương trình toán tử (Zabreiko & Krasnoselski, 1971), Định lý giọt nước rơi (Daneš, 1972), Bổ đề Phelps (Phelps, 1974), Định lý điểm bất động Caristi-Kirk (Caristi, 1976) và Định lý cánh hoa (Penot, 1986),...

Giải tích khoảng đã được Moore (1966) chính thức giới thiệu lần đầu tiên trong tác phẩm chuyên khảo mang tính nền tảng xuất bản năm 1966. Nhờ tính linh hoạt và khả năng kiểm soát sai số một cách có hệ thống, giải tích khoảng đã và đang trở thành nền tảng không thể thiếu trong các bài toán tính toán khoa học, mô phỏng số và tối ưu hóa dưới điều kiện bất định. Trong những năm gần đây, một số nghiên cứu về các phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm khoảng đã được đề xuất, trong đó nổi bật có Zhang and Huang (2022), Kumar and Ghosh (2023), Duy và ctv. (2023), Phát và ctv. (2023),… Việc thực hiện các nghiên cứu này đã tập trung phát triển các khái niệm nửa liên tục mở rộng cho hàm có giá trị khoảng, bao gồm tính nửa liên tục dưới, tính nửa liên tục trong, tính nửa liên tục ngoài,… Dựa trên những điều kiện này, các tác giả đã xây dựng thành công nhiều phiên bản mới của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng. Hơn nữa, các kết quả lý thuyết này đã được ứng dụng hiệu quả để chứng minh sự tồn tại nghiệm xấp xỉ cho các bài toán tối ưu với hàm mục tiêu có giá trị khoảng và các bài toán tối ưu liên quan.

Trong bài báo này, một khái niệm giảm nhẹ của tính nửa liên tục dưới cho hàm có giá trị khoảng đã được đề xuất, được gọi là tính nửa liên tục dưới thành phần. Dựa vào giả thiết giảm nhẹ về tính nửa liên tục của hàm mục tiêu, các phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng đã được đưa ra. Các kết quả được đưa ra là mới và mở rộng so với các kết quả nghiên cứu gần đây của Zhang and Huang (2022), Duy và ctv. (2023), Phát và ctv. (2023). Để minh họa rõ ràng, nhiều ví dụ cụ thể đã được đưa ra nhằm giúp người đọc dễ dàng hình dung và nắm bắt bản chất của các khái niệm và kết quả mới.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Các định nghĩa cơ bản trong đại số khoảng được giới thiệu dưới đây. Gọi $\mathfrak{T}$ là tập hợp các khoảng đóng bị chặn của $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{T} =: \{[a,b]: a \le b; a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Trường hợp khoảng chỉ có đơn phần tử, ta ký hiệu $a := [a,a]$. Phần tử trung hòa trong $\mathfrak{T}$ là $0 := [0,0]$.

Cho hai khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{T}$, $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{T}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Các phép toán đại số thông thường của hai khoảng được định nghĩa dưới đây:

$$A + B := [\underline{a} + \underline{b}; \overline{a} + \overline{b}].$$

$$\lambda A := \begin{cases} [\lambda\underline{a}; \lambda\overline{a}] & \text{nếu } \lambda \ge 0, \\ [\lambda\overline{a}; \lambda\underline{a}] & \text{nếu } \lambda < 0. \end{cases}$$

Với hai khoảng trong $\mathfrak{T}$, quan hệ thứ tự từng phần thường sử dụng để khảo sát cho bài toán tối ưu hàm khoảng được định nghĩa như sau:

$$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{a} \le \underline{b} \\ \overline{a} \le \overline{b} \end{cases}.$$

Trong $\mathfrak{T}$, nhận xét rằng quan hệ sắp xếp " $\preccurlyeq$ " được định nghĩa không phải là một quan hệ thứ tự có tính toàn phần, tức là không phải mọi khoảng đều có thể so sánh được với nhau. Đây chỉ là một quan hệ thứ tự từng phần, cụ thể với $A = [0,1]$ và $B = [-1,2]$ thì không so sánh được với nhau theo thứ tự $\preccurlyeq$. Ta ký hiệu là $A \not\preccurlyeq B$ khi A không nhỏ hơn B theo thứ tự $\preccurlyeq$.

Các định nghĩa về tính nửa liên tục mở rộng cho hàm có giá trị khoảng, bao gồm tính nửa liên tục dưới được đề xuất bởi Zhang and Huang (2022), tính nửa liên tục trong và tính nửa liên tục ngoài được đề xuất bởi Rockafellar and Wets (2009) được tổng hợp và trình bày dưới đây.

Định nghĩa 2.1. Giả sử (X,d) là không gian mêtric và $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, với $x_0 \in X$:

(i) **(**Rockafellar & Wets, 2009) Hàm F có tính *nửa liên tục trong* (viết tắt isc) tại x_0 khi và chỉ khi với tập mở U bất kỳ của Y thỏa mãn $F(x_0) \cap U \ne \emptyset$ thì tồn tại một lân cận V của x_0 sao cho $F(x) \cap U \ne \emptyset$ với mọi $x \in V$.

(ii) **(**Rockafellar & Wets, 2009) Hàm F có tính *nửa liên tục ngoài* (viết tắt osc) tại x_0 khi và chỉ khi với mọi lân cận U của $F(x_0)$, tồn tại lân cận V của x_0 sao cho

$$F(V) \subset U.$$

(iii) (Zhang & Huang, 2022) Hàm F có tính *nửa liên tục dưới* (viết tắt lsc) trên X khi và chỉ khi mọi tập mức dưới $\{x \in X : f(x) \preccurlyeq A\}$ là tập đóng trong X, với mọi $A \in \mathfrak{T}$.

Nhận xét rằng, trong trường hợp tổng quát thì tính isc, tính osc và lsc của hàm khoảng là các khái niệm phân biệt và không so sánh được với nhau. Trong trường hợp hàm có giá trị khoảng F suy biến thành hàm thực đơn trị thì tính lsc của hàm khoảng và tính lsc hàm thực là trùng nhau hoàn toàn; còn tính isc và tính osc của hàm khoảng thì trùng với tính liên tục của hàm thực đơn trị.

Dưới đây, một khái niệm giảm nhẹ của tính nửa liên tục dưới cho hàm có giá trị khoảng được đề xuất, được gọi là tính nửa liên tục dưới thành phần.

Định nghĩa 2.2. Giả sử (X,d) là không gian mêtric và $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng, với $F(x) := \left[\underline{f}(x), \overline{f}(x)\right], \forall x \in X$. Khi đó, F được gọi là *nửa liên tục dưới thành phần* (viết tắt *p-lsc*) nếu tồn tại $\lambda \in [0,1]$ sao cho hàm thành phần $f_\lambda := \lambda\underline{f} + (1-\lambda)\overline{f}$ là hàm thực nửa liên tục dưới.

Mệnh đề 2.1. Giả sử X là không gian mêtric và hàm có giá trị khoảng $F: X \to \mathfrak{T}$ với $F(x) := \left[\underline{f}(x), \overline{f}(x)\right], \forall x \in X$.

Khi đó,

(i) (Phát và ctv., 2023) Nếu F là isc trên X thì $\overline{f}$ là lsc trên X và $\underline{f}$ là usc trên X.

(ii) (Duy và ctv., 2023) Nếu F là osc trên X thì $\overline{f}$ là usc trên X và $\underline{f}$ là lsc trên X.

(iii) (Zhang & Huang, 2022) Hàm F là lsc trên X nếu và chỉ nếu hai ánh xạ $\underline{f}$ và $\overline{f}$ đều là hàm lsc trên X.

Mệnh đề 2.2. Giả sử X là không gian mêtric và hàm có giá trị khoảng $F: X \to \mathfrak{T}$. Khi đó, nếu F là lsc (tương ứng osc hoặc isc) thì F cũng là hàm p-lsc.

Chứng minh

• Trường hợp F là lsc: Theo Mệnh đề 2.1(iii),hàm $\underline{f}$ và $\overline{f}$ đều là lsc trên X nên suy ra hàm thành phần $f_\lambda := \lambda\underline{f} + (1-\lambda)\overline{f}$ là lsc với mọi $\lambda \in [0,1]$. Do đó F là p-lsc.

• Trường hợp F là osc: Theo Mệnh đề 2.1(ii), hàm $\underline{f}$ là lsc trên X nên suy ra hàm thành phần $f_\lambda := \lambda\underline{f} + (1-\lambda)\overline{f}$ là lsc với $\lambda = 1$. Do đó F là hàm p-lsc.

• Trường hợp F là isc: Theo Mệnh đề 2.1(i), hàm $\overline{f}$ là lsc trên X nên suy ra hàm thành phần $f_\lambda := \lambda\underline{f} + (1-\lambda)\overline{f}$ là lsc với $\lambda = 0$. Do đó F là hàm p-lsc.

Vậy mệnh đề được chứng minh xong.

Nhận xét 2.1. Trong trường hợp hàm có giá trị khoảng F suy biến thành hàm thực đơn trị thì tính nửa liên tục dưới thành phần của hàm khoảng trùng với tính nửa liên tục dưới của hàm thực đơn trị. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát với hàm khoảng không suy biến thì đây là một khái niệm mở rộng thực sự.

Ví dụ dưới đây chỉ ra rằng tính nửa liên tục dưới thành phần là một khái niệm giảm nhẹ thực sự so với các tính nửa liên tục dưới của hàm có giá trị khoảng được giới thiệu trước đây. Bên cạnh đó, tính nửa liên tục dưới thành phần cũng có thể độc lập với tính nửa liên tục dưới của hai biên của hàm có giá trị khoảng.

Ví dụ 2.1. Cho $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [-1,2], & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ [-2;4], & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Khi đó:

- F không osc trên tập hữu tỷ $\mathbb{Q}$,
- F không isc trên tập vô tỷ $\mathbb{I} := \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,
- F không lsc trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Mặt khác, ta có:

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ -2, & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}'$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 2, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 4, & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Khi đó:

- $\underline{f}$ không lsc trên tập hữu tỷ $\mathbb{Q}$,
- $\overline{f}$ không lsc trên tập vô tỷ $\mathbb{I}$.

Trong trường hợp này, khi xét hàm thành phần $f_\lambda := \lambda\underline{f} + (1-\lambda)\overline{f}$ với $\lambda = \frac{2}{3}$, ta có:

$$f_{\frac{2}{3}}(x) = \frac{2}{3}.\underline{f}(x) + \frac{1}{3}.\overline{f}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, hàm thành phần $f_{\frac{2}{3}}$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, kéo theo hàm F là hàm nửa liên tục dưới thành phần trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 2.3. (Zhang & Huang, 2022) Giả sử X là không gian mêtric và $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, F được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại khoảng đóng $A \in \mathfrak{T}$ sao cho,

$$A \preccurlyeq F(x), \forall x \in X.$$

Nhận xét rằng, F bị chặn dưới khi và chỉ khi cả hai hàm $\underline{f}$ và $\overline{f}$ đều bị chặn dưới.

Một công cụ nền tảng trong giải tích biến phân giúp chứng minh sự tồn tại của các điểm xấp xỉ cực trị, chính là nguyên lý biến phân Ekeland. Dưới đây là phát biểu của nguyên lý biến phân Ekeland cổ điển, được giới thiệu bởi Ivar Ekeland vào năm 1974.

Định lí 2.3. (Ekeland, 1974) Giả sử (X,d) là không gian mêtric đủ và $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm thực nửa liên tục dưới và bị chặn dưới. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ và $x_0 \in X$ thoả

$$f(x_0) \leq \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon,$$

thì tồn tại $\overline{x} \in X$ sao cho,

(i) $f(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \leq f(x_0)$,
(ii) $d(x_0, \bar{x}) \leq 1$,
(iii) $f(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) > f(\overline{x}), \forall x \in X\backslash\{\overline{x}\}$.

3. MỞ RỘNG NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND

Trong phần này, dựa trên tính nửa liên tục dưới thành phần được giới thiệu tại Định nghĩa 2.2, bài báo trình bày các phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng.

Định lý 3.1. Giả sử (X,d) là không gian mêtric đủ và $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng nửa liên tục dưới thành phần và bị chặn dưới trên X. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho,

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \preccurlyeq F(\bar{x}), \forall x \in X\backslash\{\bar{x}\}.$$

Chứng minh

Theo giả thiết, F là hàm nửa liên tục dưới thành phần nên tồn tại $\lambda \in [0,1]$ sao cho hàm thành phần $f_\lambda := \lambda\underline{f} + (1-\lambda)\overline{f}$ là hàm nửa liên tục dưới. Bên cạnh đó, dựa vào tính bị chặn dưới của F kéo theo tính bị chặn dưới của hàm f_λ. Do đó mọi giả thiết của Định lý 2.3 thỏa mãn với hàm f_λ. Với số thực cố định $\varepsilon > 0$, vì hàm f_λ bị chặn dưới nên $\inf_{x\in X} \overline{f}(x) > -\infty$. Khi đó, tồn tại một điểm $x_0 \in X$ thoả

$$f_\lambda(x_0) \leq \inf_{x\in X} f_\lambda(x) + \varepsilon.$$

Vậy áp dụng Định lý 2.3, tồn tại $\bar{x} \in X$, sao cho

(i) $f_\lambda(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \leq f_\lambda(x_0)$,
(ii) $d(x_0, \bar{x}) \leq 1$,
(iii) $f_\lambda(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) > f_\lambda(\overline{x}), \forall x \in X\backslash\{\overline{x}\}$.

Từ kết quả (iii), dễ dàng suy ra được,

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \preccurlyeq F(\bar{x}), \forall x \in X\backslash\{\bar{x}\}.$$

Giả sử ngược lại tồn tại $x \in X\backslash\{\overline{x}\}$ sao cho:

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \preccurlyeq F(\bar{x}), \forall x \in X\backslash\{\bar{x}\}.$$

Điều này kéo theo:

$$\underline{f}(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \leq \underline{f}(\bar{x}),$$

$$\overline{f}(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \leq \overline{f}(\bar{x}).$$

Do đó suy ra,

$$f_\lambda(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})$$

$$= \lambda\underline{f}(x) + (1-\lambda)\overline{f}(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})$$

$$\leq \lambda\left[\underline{f}(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})\right] + (1-\lambda)\left[\overline{f}(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})\right]$$

$$\leq \lambda\underline{f}(\bar{x}) + (1-\lambda)\overline{f}(\bar{x}) = f_\lambda(\overline{x}).$$

Điều này mâu thuẫn với (iii). Như vậy, định lý đã được chứng minh xong.

Dưới đây là một phiên bản khác của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng.

Định lý 3.2. Giả sử (X,d) là không gian mêtric đủ và $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng nửa liên tục dưới thành phần và bị chặn dưới. Lấy $\varepsilon > 0$ và $x_0 \in X$ thoả

$$F(x) + \varepsilon \not\preccurlyeq F(x_0), \quad \forall x \in X.$$

Giả thiết rằng tập $\{x \in X: F(x) + \varepsilon d(x, x_0) \preccurlyeq F(x_0)\}$ là tập đóng. Khi đó, thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho:

(i) $F(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \preccurlyeq F(x_0)$;
(ii) $d(\bar{x}, x_0) \leq 1$;
(iii) $F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\preccurlyeq F(\overline{x}), \forall x \in X\backslash\{\overline{x}\}$.

Chứng minh

Đặt

$$X_0 := \{x \in X: F(x) + \varepsilon d(x, x_0) \preccurlyeq F(x_0)\}.$$

Nhận xét rằng, $X_0 \neq \emptyset$ vì $x_0 \in X_0$. Vậy theo giả thiết thì ta có tập X_0 là tập đóng khác rỗng. Áp dụng Định lý 3.1 với hàm khoảng F trên không gian metric (X_0, d), khi đó tồn tại $\bar{x} \in X_0$ sao cho,

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \not\preccurlyeq F(\bar{x}), \forall x \in X_0\backslash\{\bar{x}\}.$$

Từ $\bar{x} \in X_0$, ta có (i) đúng. Ta kiểm tra (iii) đúng. Ta lấy $x \in X$. Nếu $x \in X_0\backslash\{\bar{x}\}$ thì (iii) đúng. Nếu $x \notin X_0$, giả sử rằng (iii) không đúng, tức là:

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \preccurlyeq F(\bar{x}).$$

Theo đó,

$$F(x) + \varepsilon d(x, x_0) \preccurlyeq F(x) + \varepsilon\big(d(x, x_0) + d(x, \bar{x})\big)$$

$$\preccurlyeq \big(F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})\big) + \varepsilon d(x, x_0)$$

$$\preccurlyeq F(\bar{x}) + \varepsilon d(x, x_0)$$

$$\preccurlyeq F(x_0),$$

mâu thuẫn với $x \notin X_0$. Vậy, (iii) đúng trên X.

Để kiểm tra (ii) đúng, ta sử dụng phương pháp phản chứng. Thật vậy, giả sử ngược lại $d(x_0, \bar{x}) > 1$. Khi đó, bởi (i) ta có đánh giá

$$F(\overline{x}) + \varepsilon \preccurlyeq F(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \preccurlyeq F(x_0),$$

mâu thuẫn với giả thiết của điểm x_0. Do đó, ta có $d(\bar{x}, x_0) \leq 1$.

Định lý 3.3. (Zhang & Huang, 2022) Giả sử (X, d) là không gian mêtric đủ và hàm $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng nửa liên tục dưới và bị chặn dưới. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ và $x_0 \in X$ thoả

$$F(x) + \varepsilon \not\preccurlyeq F(x_0), \quad \forall x \in X,$$

thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho:

(i) $F(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \preccurlyeq F(x_0)$,
(ii) $d(\overline{x}, x_0) \leq 1$,
(iii) $F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\preccurlyeq F(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}$.

Chứng minh

Đặt

$$X_0 := \{x \in X: F(x) + \varepsilon d(x, x_0) \preccurlyeq F(x_0)\}.$$

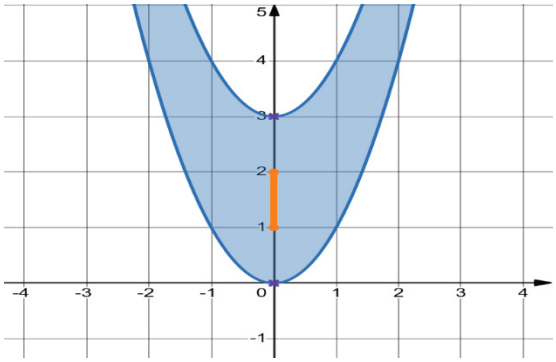
Theo giả thiết, vì F là lsc nên X_0 là tập đóng khác rỗng và F cũng là nửa liên tục dưới thành phần (Mệnh đề 2.2(iii)). Do đó mọi giả thiết của Định lý 3.2 thỏa mãn, khi đó tồn tại $\bar{x} \in X$ thỏa (i)-(iii).

Nhận xét 3.1. Định lý 3.1 và Định lý 3.2 là mở rộng các kết quả gần đây về chủ đề này, bao gồm mở rộng của Định lý 3.1 của Zhang and Huang (2022) dựa trên giả thiết về tính nửa liên tục dưới của hàm khoảng; mở rộng của Định lý 3.1 của Phát và ctv. (2023) dựa trên giả thiết về tính nửa liên tục inner của hàm khoảng; mở rộng của Định lý 3.1 của Duy và ctv. (2023) dựa trên giả thiết về tính nửa liên tục outer của hàm khoảng.

Dưới đây là một số ví dụ số cụ thể để chỉ ra rằng các kết quả trước đây là các phiên bản khác nhau của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm khoảng và chúng không so sánh được với nhau. Tuy nhiên, kết quả của định lý 3.1 và định lý 3.2 là thực sự mở rộng hơn các kết quả đã có trước đó.

Ví dụ 3.1. $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [x^2, x^2 + 3], & \text{nếu } x \neq 0 \\ [1; 2], & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$



Hình 1. Đồ thị minh họa cho Ví dụ 3.1

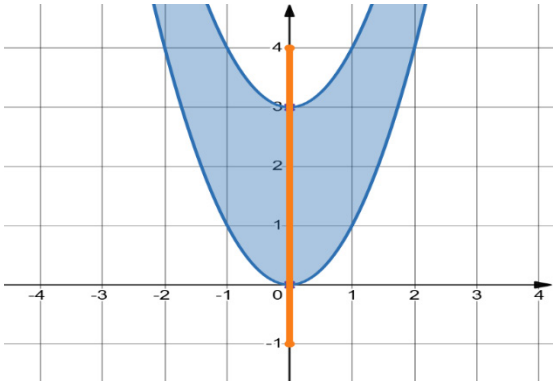
Trong trường hợp này, F không osc tại $x = 0$ nên Định lý 3.1 của Duy và ctv. (2023) không áp dụng được. Mặt khác, Định lý 3.1 của Zhang and Huang (2022) cũng không áp dụng được vì F cũng không lsc tại $x = 0$. Tuy nhiên, ta có hàm F là hàm nửa liên tục inner nên cũng là hàm nửa liên tục dưới thành phần và hàm F bị chặn dưới trên $\mathbb{R}$ nên các điều kiện của các Định lý 3.1-3.2 đều thoả mãn.

Bằng cách tính toán, ta dễ dàng kiểm tra được với cố định $\varepsilon \in (0,1]$ thì với mỗi $\overline{x} \in \left[-\frac{1}{\varepsilon}, 0\right) \cup (0, , \frac{1}{\varepsilon}]$ đều thỏa

$$F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\preccurlyeq F(\overline{x}), \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\overline{x}\}.$$

Ví dụ 3.2. $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [x^2, x^2 + 3], & \text{nếu } x \neq 0 \\ [-1; 4], & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$



Hình 2. Đồ thị minh họa cho Ví dụ 3.2

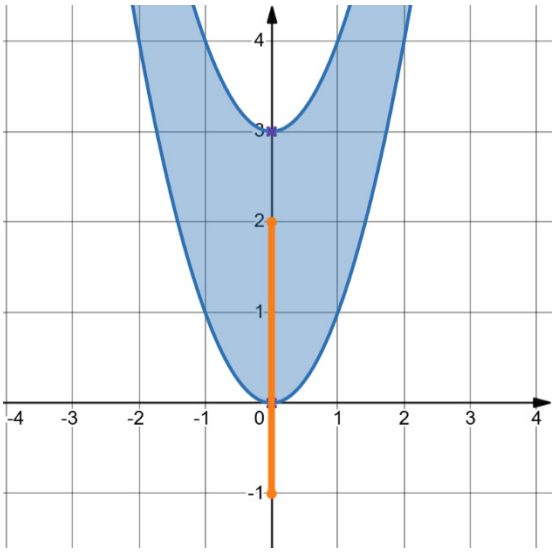
Trong trường hợp này, F không isc tại $x = 0$ nên Định lý 3.1 của Phát và ctv. (2023) không áp dụng được. Mặt khác, F cũng không lsc tại $x = 0$ nên Định lý 3.1 của Zhang and Huang (2022) cũng không áp dụng được. Tuy nhiên, hàm F là hàm nửa liên tục outer nên cũng là hàm nửa liên tục dưới thành phần và hàm F bị chặn dưới trên $\mathbb{R}$ nên các điều kiện của các Định lý 3.1-3.2 đều thoả mãn.

Bằng cách tính toán, ta dễ dàng kiểm tra được với cố định $\varepsilon \in (0,1]$ thì với $\overline{x} = 0$ thỏa

$$F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\leq F(\overline{x}), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\overline{x}\}.$$

Ví dụ 3.3. $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [x^2, x^2+3], & \text{nếu } x \neq 0 \\ [-1; 2], & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$



Hình 3. Đồ thị minh họa cho Ví dụ 3.3

Trong trường hợp này, F không isc tại $x = 0$ nên Định lý 3.1 của Phát và ctv. (2023) không áp dụng được. Mặt khác, Định lý 3.1 của Zhang and Huang (2022) cũng không áp dụng được vì F cũng không osc tại $x = 0$. Tuy nhiên, ta có hàm F là hàm lsc nên cũng là hàm nửa liên tục dưới thành phần và hàm F bị chặn dưới trên $\mathbb{R}$ nên các điều kiện của các Định lý 3.1 - 3.3 đều thoả mãn. Bằng cách tính toán, ta dễ dàng kiểm tra được với cố định $\varepsilon \in (0,1]$ thì với $\overline{x} = 0$ thỏa

$$F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\leq F(\overline{x}), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\overline{x}\}.$$

Ví dụ 3.4. $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [-2,2], & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ [-1; 1], & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Ta có, Định lý 3.1 của Phát và ctv. (2023) không áp dụng được vì F không isc trên tập hữu tỷ $\mathbb{Q}$; Định lý 3.1 của Duy và ctv. (2023) cũng không áp dụng được vì F không osc trên tập vô tỷ $\mathbb{I}$; Định lý 3.1 của Zhang and Huang (2022) cũng không áp dụng được vì F cũng không lsc trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$.

Trong trường hợp này, ta có:

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} -2, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 2, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Xét hàm thành phần $f_\lambda := \lambda \underline{f} + (1-\lambda)\overline{f}$ với $\lambda = \frac{1}{2}$, ta có:

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}.\underline{f}(x) + \frac{1}{2}.\overline{f}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, hàm thành phần $f_{\frac{1}{2}}$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, kéo theo hàm F là hàm nửa liên tục dưới thành phần trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, hàm F cũng bị chặn dưới trên $\mathbb{R}$ nên các điều kiện của các Định lý 3.1 - 3.2 đều thoả mãn. Bằng cách tính toán, ta dễ dàng kiểm tra được với cố định $\varepsilon \in (0,1]$ thì với mỗi $\overline{x} \in \mathbb{Q}$ đều thỏa

$$F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\leq F(\overline{x}), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\overline{x}\}.$$

Dựa vào Định lý 3.1, khi hàm khoảng suy biến về hàm thực, ta dễ dàng thu được phiên bản của nguyên lý biến phân Ekeland cổ điển dưới đây:

Hệ quả 3.4. *Giả sử (X, d) là không gian mêtric đủ và $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm thực nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên X. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho:*

$$f(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) > f(\bar{x}), \forall x \in X\backslash\{\bar{x}\}.$$

Tương tự, dựa vào Định lý 3.3, khi hàm khoảng suy biến về hàm thực, ta dễ dàng thu được phiên bản của nguyên lý biến phân Ekeland (1974) cổ điển ở Định lý 2.3.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, định nghĩa về tính nửa liên tục dưới thành phần của hàm khoảng được đề xuất. Trên cơ sở giả thiết về tính nửa liên tục của hàm mục tiêu được giảm nhẹ, các phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng đã được trình bày. Nhiều ví dụ số cụ thể được đưa ra để người đọc dễ hình dung và nắm bắt bản chất của các khái niệm và kết quả mới. Các kết quả đạt được là mới và mở rộng các kết quả gần đây trong lĩnh vực liên quan.

LỜI CẢM TẠ

Đề tài này được tài trợ bởi Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2025-38.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Caristi, J. (1976). Fixed point theorem for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, *215*, 241-251. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1976-0394329-4

Daneš, J. (1972). A geometric theorem useful in nonlinear analysis. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, *6*(4), 369-375.

Duy, T. V., Anh, H. N. H., Diễm, Đ. H., & Quý, Đ. N. (2023). Nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng dựa trên tính nửa liên tục outer. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, *59*(5A), 10-16. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2022.106

Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *47*(3), 324-353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0

Kumar, G., & Ghosh, D. (2023). Ekeland's variational principle for interval-valued functions. *Computational and Applied Mathematics*, *42*, Article number: 28. https://doi.org/10.1007/s40314-022-02173-x

Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Penot, J. P. (1986). The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle. *Nonlinear Analysis*, *10*(9), 813-822. https://doi.org/10.1016/0362-546X(86)90069-6

Phát, N. T., Du, H. T., Danh, P. C., Diễm, Đ. H., & Quý, Đ. N. (2023). Mở rộng nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng dựa trên tính nửa liên tục inner. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, *59*(5A), 17-24. https://doi.org/10.22144/ctujos.2023.181

Phelps, R. R. (1974). Support cones in Banach spaces and their applications. *Advances in Mathematics*, *13*, 1-19. https://doi.org/10.1016/0001-8708(74)90062-0

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J. -B. (2009). *Variational Analysis*. Springer, Berlin.

Zabreiko, P. P., & Krasnoselski, M. A. (1971). Solvability of nonlinear operator equations. *Functional Analysis and Its Applications*, *5*(3), 206-208. https://doi.org/10.1007/BF01078126

Zhang, C., & Huang, N. (2022). On Ekeland's variational principle for interval-valued functions with applications. *Fuzzy Sets and Systems*, *436*,152–174. https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.10.003