Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2026.212

ĐÁNH GIÁ HIỆU NĂNG VÀ TÍNH BỀN VỮNG CỦA MỘT SỐ BỘ ĐIỀU KHIỂN PHI TUYẾN: MỘT NGHIÊN CỨU SO SÁNH TRÊN MÔ HÌNH CON LẮC NGƯỢC

Vũ Xuân Huy*
Viện Tự động hoá, Viện Khoa học và Công nghệ quân sự, Việt Nam
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): vxhuy1788@gmail.com*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 05/02/2026
Sửa bài (Revised): 09/03/2026
Duyệt đăng (Accepted): 19/09/2026

Title: *Performance and robustness evaluation of nonlinear control strategies: A comparative study on an inverted pendulum system*

Author(s): *Vu Xuan Huy**

Affiliation(s): *Control, Automation in Production and Improvement of Technology Institute, Academy of Military Science and Technology, Viet Nam*

TÓM TẮT

Nghiên cứu được thực hiện nhằm so sánh hiệu năng và tính bền vững của các bộ điều khiển phi tuyến Backstepping, điều khiển trượt (SMC) và RISE trên mô hình con lắc ngược. Đóng góp chính của kết quả nghiên cứu là giúp xây dựng khung đánh giá thống nhất, phân tích đồng thời độ chính xác bám, thời gian xác lập, sai số RMS và năng lượng điều khiển có xét đến giới hạn bão hòa của cơ cấu chấp hành. Các bộ điều khiển được kiểm chứng qua ba kịch bản: điều kiện danh định, nhiễu ngoại sinh và bất định tham số. Kết quả cho thấy Backstepping đạt hiệu quả năng lượng cao trong điều kiện danh định nhưng suy giảm tính bền vững khi xuất hiện nhiễu và sai lệch mô hình. SMC có khả năng kháng nhiễu nhanh song tiêu thụ năng lượng lớn hơn và nhạy cảm với nhiễu đo lường. RISE đạt được sự cân bằng tốt hơn giữa độ chính xác bám, khả năng chống nhiễu và mức độ dao động của tín hiệu điều khiển nhờ cơ chế tích phân sai số, mặc dù đòi hỏi năng lượng cao hơn ở pha quá độ và quá trình tinh chỉnh hệ số phức tạp.

Từ khóa: *Con lắc ngược, điều khiển phi tuyến, điều khiển trượt, RISE*

ABSTRACT

This paper presents a comparative study on the performance and robustness of nonlinear controllers: Backstepping, Sliding Mode Control (SMC), and RISE on an inverted pendulum model. The main contribution is the development of a unified evaluation framework that simultaneously analyzes tracking accuracy, settling time, RMS error, and control energy under actuator saturation constraints. The controllers are verified through three scenarios: nominal conditions, external disturbances, and extreme uncertainties (a 3000% increase in pendulum mass). Results show that Backstepping achieves high energy efficiency under nominal conditions but its robustness degrades in the presence of disturbances and model deviations. SMC offers fast disturbance rejection but consumes higher energy and is sensitive to measurement noise. RISE achieves a better balance among tracking accuracy, disturbance rejection capability, and control signal oscillation thanks to its error integral mechanism, despite requiring higher transient energy and complex parameter tuning.

Keywords: *Backstepping control, inverted pendulum, nonlinear control, sliding mode control*

1. GIỚI THIỆU

Con lắc ngược là một trong những mô hình phi tuyến kinh điển thường được sử dụng trong nghiên cứu điều khiển tự động do đặc tính bất ổn định, ghép kênh mạnh và nhạy cảm với nhiễu cũng như sai lệch tham số. Mặc dù có cấu trúc cơ học tương đối đơn giản nhưng hệ con lắc ngược vẫn phản ánh đầy đủ các thách thức cơ bản trong điều khiển các hệ cơ điện phi tuyến, vì vậy con lắc ngược đã và đang được sử dụng rộng rãi như một mô hình chuẩn để đánh giá và so sánh hiệu năng của các bộ điều khiển khác nhau. Việc nghiên cứu mô hình này không chỉ mang ý nghĩa học thuật mà còn có giá trị ứng dụng thực tế cao như robot hai chân, xe tự cân bằng Segway hay công nghệ hàng không vũ trụ.

Trong giai đoạn đầu, các phương pháp điều khiển tuyến tính như PID (Pathak & Paliwal, 2017) và LQR (Đức và ctv., 2023; Nguyen et al., 2021) đã được áp dụng rộng rãi cho hệ con lắc ngược nhờ cấu trúc đơn giản và dễ triển khai. Các kết quả nghiên cứu cho thấy các phương pháp này có thể ổn định hệ quanh điểm làm việc danh định; tuy nhiên, chất lượng điều khiển suy giảm đáng kể khi hệ chịu ảnh hưởng của nhiễu và bất định tham số, đặc biệt đối với các trạng thái phi tuyến mạnh như góc con lắc (Prasad et al., 2014). Điều này cho thấy sự cần thiết phải nghiên cứu và áp dụng các phương pháp điều khiển phi tuyến nhằm nâng cao chất lượng điều khiển và tính bền vững của hệ thống.

Trong số các phương pháp điều khiển phi tuyến, điều khiển trượt (Sliding Mode Control – SMC) là một hướng tiếp cận được nghiên cứu rộng rãi nhờ khả năng bền vững cao trước nhiễu và sai lệch mô hình. Cơ sở lý thuyết của phương pháp này đã được trình bày một cách hệ thống trong các công trình kinh điển (Utkin, 1992). Trên cơ sở đó, SMC và các biến thể của nó cho hệ con lắc ngược đã được áp dụng trong nhiều nghiên cứu, kết quả cho thấy khả năng ổn định nhanh và chống nhiễu tốt thông qua mô phỏng (Irfan et al., 2018). Tuy nhiên, nhược điểm chính của phương pháp này là hiện tượng dao động điều khiển (chattering), gây ảnh hưởng bất lợi đến cơ cấu chấp hành và hạn chế khả năng ứng dụng trong thực tế. Nhằm khắc phục hiện tượng chattering và cải thiện tốc độ hội tụ, các dạng điều khiển trượt nâng cao đã được đề xuất. Kết quả các nghiên cứu cho thấy có thể đảm bảo hội tụ trong thời gian hữu hạn đối với các hệ phi tuyến bất định; tuy nhiên, việc thiết kế mặt trượt và lựa chọn tham số điều khiển phù hợp cho các hệ có nhiều trạng thái như con lắc ngược còn gặp nhiều khó khăn (Feng et al., 2013).

Song song với SMC, điều khiển backstepping là một phương pháp điều khiển phi tuyến dựa trên lý thuyết Lyapunov, cho phép thiết kế bộ điều khiển theo từng bước và đảm bảo ổn định tiệm cận cho hệ thống (Krstić et al., 1995; Khanh và ctv., 2014). Mặc dù Backstepping cung cấp một công cụ thiết kế có hệ thống dựa trên lý thuyết Lyapunov để đảm bảo ổn định tiệm cận, nhưng hạn chế lớn là cấu trúc phức tạp và phụ thuộc chặt chẽ vào mô hình toán học.

Gần đây, để khắc phục triệt để vấn đề bất định tham số và nhiễu, nhiều nghiên cứu đã chuyển hướng sang tích hợp các kỹ thuật trí tuệ nhân tạo hoặc điều khiển mờ (Fuzzy). Kết quả các công trình mới nhất đã giúp chứng minh hiệu năng xuất sắc của mạng nơ-ron (SMCNN) (Irfan et al., 2024), PID mờ (Nguyen & Nguyen., 2025), hay điều khiển mờ tối ưu bền vững (Pham et al., 2024) trong việc bù trừ sự thay đổi khối lượng con lắc. Mặc dù đem lại khả năng thích nghi cao nhưng nhược điểm của các phương pháp này là sự phức tạp trong thuật toán; chúng đòi hỏi giải quyết các bất phương trình ma trận tuyến tính đồ sộ, lượng dữ liệu lớn, hoặc nhiều phép toán logic phức tạp. Điều này gây trễ tín hiệu và tạo ra gánh nặng tính toán rất lớn khi triển khai trên các hệ thống phần cứng nhúng có tài nguyên hạn chế.

Trong bối cảnh đó, phương pháp RISE (Robust Integral of the Sign of the Error) nổi lên như một giải pháp thay thế đầy tiềm năng, cho phép bù trừ các bất định trơn mà không gây ra chattering nhờ cơ chế tích phân sai số phi tuyến (Dawson et al., 1998; Xian et al., 2004). Rise còn không đòi hỏi khối lượng tính toán đồ sộ hay cấu trúc dữ liệu phức tạp như các phương pháp AI/Mờ. Mặc dù RISE mang lại nhiều hứa hẹn nhưng việc đánh giá toàn diện sức mạnh của nó khi đặt lên bàn cân với SMC hay Backstepping trên các hệ thiếu dẫn động vẫn chưa được khai thác triệt để.

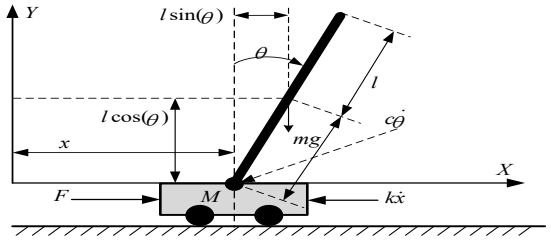
Qua việc phân tích các công trình đã công bố, có thể nhận thấy một khoảng trống nghiên cứu rõ rệt: Phần lớn các bài báo chỉ tập trung đề xuất đơn lẻ một phương pháp, hoặc nếu có so sánh thì thường dựa trên các giả định lý tưởng hóa (cung cấp lực điều khiển vô hạn). Rất hiếm công trình thiết lập một khung đánh giá định lượng, đặt các chiến lược điều khiển phi tuyến vào một hệ quy chiếu có xét đến các giới hạn vật lý của cơ cấu chấp hành. Để lấp đầy khoảng trống này, bài báo được thực hiện nhằm thiết kế, mô phỏng và so sánh toàn diện ba chiến lược điều khiển đại diện: Backstepping, SMC (làm mềm bằng hàm tanh) và RISE. Điểm nổi bật của nghiên cứu là việc thiết lập một khung kiểm chứng khắt

khe, có xét đến giới hạn bão hòa điện áp thực tế của động cơ chấp hành. Các bộ điều khiển được thử thách qua ba kịch bản: điều kiện chuẩn, nhiễu ngoại sinh đa giai đoạn và bất định cực đoan thay đổi khối lượng con lắc thông qua việc phân tích đồng thời các chỉ tiêu định lượng (sai số RMS, thời gian xác lập và năng lượng điều khiển). Mục tiêu của nghiên cứu là cung cấp một bức tranh so sánh về sự đánh đổi giữa độ chính xác, tính bền vững và hiệu quả năng lượng, qua đó tạo cơ sở khoa học cho việc lựa chọn bộ điều khiển tối ưu trong các hệ cơ điện tử thực tế.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Mô hình toán học hệ con lắc ngược

Để thiết lập mô hình toán học, nghiên cứu áp dụng các giả thiết sau: (1) thanh con lắc là vật rắn tuyệt đối, bỏ qua biến dạng đàn hồi; (2) các khớp nối là lý tưởng, không có khe hở cơ khí; (3) bỏ qua ảnh hưởng của lực cản khí động học và (4) bánh xe goòng lăn không trượt trên đường ray.



Hình 1. Mô hình hệ con lắc ngược

Trên Hình 1 ta có: $M(kg)$ là khối lượng xe goòng, $m(kg)$ là khối lượng con lắc, $l(m)$ là khoảng cách từ trục quay đến trọng tâm của con lắc, $J(kg.m^2)$ là mô-men quán tính của con lắc tại trọng tâm, $x(m)$ là vị trí của xe theo phương ngang, $\theta(rad)$ là góc của con lắc, $g(m/s^2)$ là gia tốc trọng trường. $F(N)$ là lực điều khiển xe goòng, $k\dot{x}(N)$ là lực ma sát giữa xe và đường ray, $c\dot{\theta}(N)$ lực ma sát của trục quay thanh lắc. Trong nghiên cứu này, góc con lắc θ được định nghĩa sao cho $\theta = 0$ tương ứng với vị trí con lắc cân bằng thẳng đứng hướng lên trên, là trạng thái cân bằng không ổn định của hệ.

Động năng của xe: $T_1 = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$ (1)

Động năng của con lắc:

$$T_2 = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

Động năng của hệ thống: $T = T_1 + T_2$

$$= \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$$
$$= \frac{1}{2}\dot{x}^2(M+m) + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

Thế năng của hệ thống cũng là thế năng của con lắc:

$$V = mgl\cos(\theta) \quad (4)$$

Toán tử Lagrangian:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(M+m\right) + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta) \quad (5)$$

Hệ phương trình toán học hệ con lắc ngược theo phương pháp Euler_Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = F - k\dot{x} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -c\dot{\theta} \end{cases} \quad (6)$$

Thực hiện các tính toán riêng lẽ sau:

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(M+m) + ml\dot{\theta}\cos(\theta)$ suy ra:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x}(M+m) + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{x}\cos(\theta) + \left(J+ml^2\right)\dot{\theta}$ suy ra:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml\ddot{x}\cos(\theta) - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) + \left(J+ml^2\right)\ddot{\theta} \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl\sin(\theta) - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (10)$$

Thay (7), (8), (9) và (10) vào (6), ta được:

$$\begin{cases} \ddot{x}(M+m)+ml\ddot{\theta}\cos(\theta)-ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)=F-k\dot{x} \\ ml\ddot{x}\cos(\theta)+\left(J+ml^2\right)\ddot{\theta}-mgl\sin(\theta)=-c\dot{\theta} \end{cases} \quad (11)$$

Hệ phương trình (11) mô tả động học đầy đủ của hệ con lắc ngược dạng xe–con lắc, là hệ phi tuyến, liên kết mạnh và thiếu dẫn động (underactuated), với hai bậc tự do nhưng chỉ có một tín hiệu điều khiển tác động lên hệ.

Hệ phương trình vi phân trên có thể được viết lại dưới dạng vector-ma trận chuẩn tắc, đây là dạng cơ sở cho việc thiết kế các bộ điều khiển RISE và SMC

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=u-d_t \quad (12)$$

Trong đó:

Vector trạng thái $q=[x,\theta]^T$ đại diện cho vị trí xe goòng và góc con lắc.

Ma trận quán tính $M(q)\in\mathbb{R}^{2x2}$ luôn đối xứng và xác định dương:

$$M(q)=\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2+I \end{bmatrix}$$

Ma trận Coriolis và hướng tâm $C(q,\dot{q})\in\mathbb{R}^{2x2}$ được xây dựng theo dạng chuẩn, thỏa mãn các điều kiện cần cho phân tích ổn định Lyapunov trong thiết kế bộ điều khiển.

$$C(q,\dot{q})=\begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vector trọng trường $G(q)\in\mathbb{R}^{2x1}$:

$$G(q)=\begin{bmatrix} 0 & -mgl\sin\theta \end{bmatrix}^T$$

Vector đầu vào u : phản ánh đặc tính thiếu dẫn động của hệ, trong đó lực điều khiển chỉ tác động trực tiếp lên chuyển động tịnh tiến của xe goòng, vector này có dạng: $u=\begin{bmatrix} u_t & 0 \end{bmatrix}^T$

Trong nghiên cứu này, các bộ điều khiển phi tuyến bền vững như SMC và RISE được thiết kế tại mức lực tương đương F, phản ánh trực tiếp tác động cơ học lên hệ. Trong khi đó, bộ điều khiển Backstepping được xây dựng trực tiếp tại mức tín hiệu điện áp u_t. Để đảm bảo tính nhất quán trong thực thi và so sánh, lực điều khiển tương đương F trong trường hợp SMC và RISE được ánh xạ sang điện áp điều khiển động cơ thông qua mô hình truyền động:

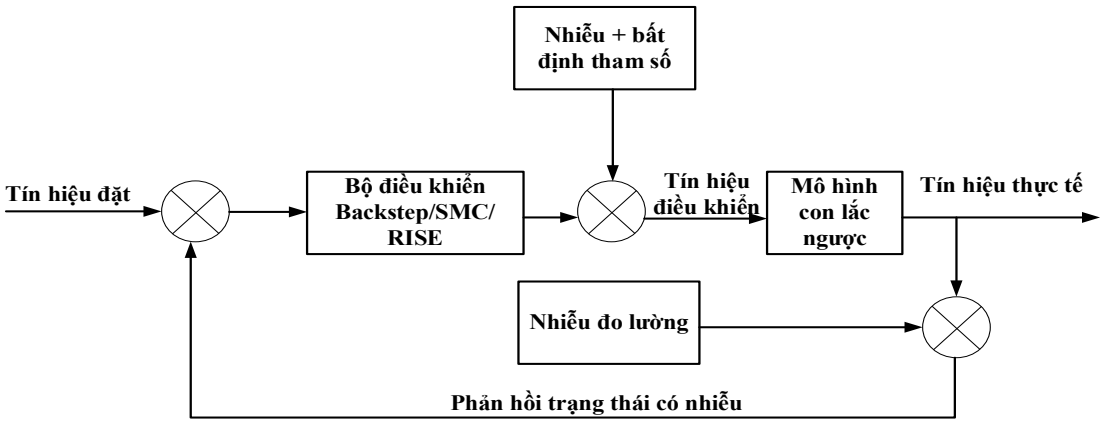
$$u_t=\frac{1}{K_v}\left(F+K_r\dot{x}\right)$$

Trong đó $\dot{x}$ là vận tốc xe và các tham số K_v, K_r được xác định từ đặc tính động cơ

Vector nhiễu loạn d_t: Đại diện cho các thành phần ma sát chưa biết mô hình hóa, nhiễu ngoại tác và các sai số mô hình. d_t được giả thiết là bị chặn và đạo hàm bậc nhất của nó tồn tại và bị chặn.

$$d_t=\begin{bmatrix} d_x(t) & d_\theta(t) \end{bmatrix}^T$$

Trước khi đi vào chi tiết việc tổng hợp các luật điều khiển Backstepping, SMC và RISE, sơ đồ cấu trúc điều khiển tổng quát của hệ thống được thiết lập tại Hình 2.



Hình 2. Sơ đồ tổng thể cấu trúc điều khiển

2.2. Thiết kế bộ điều khiển:

2.2.1. Backstepping

Backstepping là phương pháp điều khiển phi tuyến có cấu trúc đệ quy, dựa trên lý thuyết ổn định Lyapunov, cho phép thiết kế luật điều khiển từng bước đối với các hệ phi tuyến có cấu trúc chặt chẽ (Slotine & Li, 1991; Krstić et al., 1995). Trong nghiên cứu này, bộ điều khiển Backstepping được sử dụng như một bộ điều khiển tham chiếu nhằm đánh giá và so sánh hiệu năng với các bộ điều khiển RISE và SMC.

Đặt $x_1 = x$ là vị trí xe, $x_2 = \theta$ là góc của con lắc ($x_2 = 0$ khi con lắc thẳng đứng, $x_2 = \pi$ khi con lắc hướng thẳng xuống), x_3 là vận tốc của xe, x_4 là vận tốc góc của con lắc. Trạng thái của hệ con lắc ngược là vectơ $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$.

Hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống như sau:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{\left(J+ml^2\right)\left(mlx_4^2 \sin x_2 - kx_3\right) - ml\cos x_2\left(mgl\sin x_2 - cx_4\right) + \left(J+ml^2\right)F}{\left(M+m\right)\left(J+ml^2\right) - m^2l^2\left(\cos x_2\right)^2} \\ \dot{x}_4 = \dfrac{\left(M+m\right)\left(mgl\sin x_2 - cx_4\right) - ml\cos x_2\left(mlx_4^2 \sin x_2 - kx_3\right) - ml\cos x_2 F}{\left(M+m\right)\left(J+ml^2\right) - m^2l^2\left(\cos x_2\right)^2} \end{cases} \quad (13)$$

Lực tác động vào xe goòng có dạng như sau:

$$F = \frac{K_m K_g}{Rr} u_t - \frac{K_m^2 K_g^2}{Rr^2} \dot{y} = K_v u_t - K_r x_3 \quad (14)$$

Trong đó: u_t là điện áp cấp cho động cơ kéo xe goòng thông qua hệ thống dây xích – bánh đai, K_m là độ lợi động cơ, K_g là hệ số bánh răng, $R(\Omega)$ là điện trở nội của động cơ, $r(m)$ là bán kính bu li. Trong nghiên cứu này, u_t ược xem là tín hiệu điều khiển ở mức điện áp, trong khi lực F là đầu ra của cơ cấu chấp hành. Đối với Backstepping, các tham số trong (14) được giả thiết biết chính xác; trong khi đối với SMC và RISE, các bất định tham số và nhiễu trong (14) được gộp vào các thành phần bất định của mô hình động lực học.

Từ (13) và (14), ta được hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống như sau:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_3(x) + g_3(x)u_t \\ \dot{x}_4 = f_4(x) + g_4(x)u_t \end{cases} \quad (15)$$

Trong đó:

$$f_3(x) = \frac{\left(J+ml^2\right)\left(mlx_4^2 \sin x_2 - kx_3 - K_r x_3\right) - ml\cos x_2\left(mgl\sin x_2 - cx_4\right)}{\left(M+m\right)\left(J+ml^2\right) - m^2l^2\left(\cos x_2\right)^2}$$

$$f_4(x) = \frac{\left(M+m\right)\left(mgl\sin x_2 - cx_4\right) - ml\cos x_2\left(mlx_4^2 \sin x_2 - kx_3 - K_r x_3\right)}{\left(M+m\right)\left(J+ml^2\right) - m^2l^2\left(\cos x_2\right)^2}$$

$$g_3(x) = \frac{\left(J+ml^2\right)K_v}{\left(M+m\right)\left(J+ml^2\right) - m^2l^2\left(\cos x_2\right)^2}$$

$$g_4(x) = \frac{-ml\cos x_2 K_v}{\left(M+m\right)\left(J+ml^2\right) - m^2l^2\left(\cos x_2\right)^2}$$

Các bước tổng hợp luật điều khiển Backstepping ổn định con lắc cân bằng:

Bước 1: Đặt $e_1 = x_2 - k_1 x_1$ (16)

Với k_1 là hằng số,

suy ra $\dot{e}_1 = \dot{x}_2 - k_1\dot{x}_1 = x_4 - k_1 x_3$ (17)

Để đạt được mục tiêu $e_1 \to 0$, hàm Lyapunov được chọn như sau:

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (18)$$

$$\dot{V}_1 = e_1\dot{e}_1 = e_1\left(x_4 - k_1 x_3\right) \quad (19)$$

Để hệ thống ổn định, tức là $\dot{V}_1 \le 0$, ta chọn

$$x_4 = -c_1 e_1 + k_1 x_3 \ (c_1 > 0) \quad (20)$$

Như vậy, $\dot{V}_1 = -c_1 e_1^2 \le 0$

Bước 2: Để $x_4 = -c_1 e_1 + k_1 x_3$, ta chọn tín hiệu điều khiển giả là $x_{4d} = -c_1 e_1 + k_1 x_3$

Mục tiêu là $x_4 \to x_{4d}$

Đặt $e_2 = x_4 - x_{4d} = x_4 + c_1 e_1 - k_1 x_3$ (21)

Đạo hàm

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_4 + c_1\dot{e}_1 - k_1\dot{x}_3 = u_t\left(g_4 - k_1 g_3\right) + f_4 - k_1 f_3 + c_1\left(x_4 - k_1 x_3\right) \quad (22)$$

Hàm Lyapunov được chọn như sau:

$$V_2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (23)$$

$$\dot{V}_2 = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 = e_1\left(e_2 - c_1 e_1\right) + e_2\dot{e}_2 = -c_1 e_1^2 + e_2\left(e_1 + \dot{e}_2\right) \quad (24)$$

Để $\dot{V}_2 \le 0$ thì $e_1 + \dot{e}_2 = -c_2 e_2$ ($c_2 > 0$).

Luật điều khiển được suy ra như sau:

$$u_t = \frac{1}{g_4 - k_1 g_3}\left[k_1 f_3 - f_4 - c_1\left(x_4 - k_1 x_3\right) - e_1 - c_2 e_2\right] \quad (25)$$

Theo lý thuyết ổn định Lyapunov thì $e_1 \to 0$ và $e_2 \to 0$ khi $t \to \infty$ qua đó mục tiêu cân bằng con lắc ngược được đảm bảo (Slotine & Li, 1991; Krstić et al., 1995).

2.2.2. Điều khiển trượt SMC

Điều khiển trượt (Sliding Mode Control – SMC) là một trong những phương pháp điều khiển phi tuyến bền vững, nổi bật với khả năng duy trì chất lượng điều khiển trước các bất định mô hình và nhiễu ngoại sinh (Utkin, 1992; Slotine & Li, 1991). Nhờ đặc tính này, SMC đã được áp dụng rộng rãi cho các hệ cơ điện phi tuyến, đặc biệt là hệ con lắc ngược có cấu trúc thiếu dẫn động và ghép kênh mạnh (Irfan et al., 2018). Trong nghiên cứu này, phương pháp điều khiển trượt được áp dụng cho hệ con lắc ngược nhằm khai thác đặc tính bền vững cao của hệ kín trước các bất định mô hình và nhiễu ngoại sinh.

Xét hệ con lắc ngược (12) được mô tả bởi mô hình động lực học phi tuyến tổng quát dưới dạng:

$$M\left(q\right)\ddot{q} + C\left(q,\dot{q}\right)\dot{q} + G\left(q\right) = u + d_t$$

Sai số bám quỹ đạo của hệ được xác định như sau:

$$e_\theta = \theta - \theta_d, e_x = x - x_d \quad (26)$$

Trong đó, θ_d và x_d lần lượt là quỹ đạo mong muốn của góc con lắc và vị trí xe.

Hai mặt trượt thành phần được xây dựng tương ứng cho hai chuyển động:

$$S_\theta = \dot{\theta} + \lambda_\theta e_\theta, S_x = \dot{\theta} + \lambda_x e_x \quad (27)$$

Với $\lambda_\theta > 0, \lambda_x > 0$ là các hệ số thiết kế quyết định tốc độ suy giảm sai số.

Do hệ con lắc ngược có hai mục tiêu điều khiển đồng thời là ổn định góc con lắc và bám quỹ đạo vị trí xe, việc xây dựng mặt trượt ghép kênh là cần thiết nhằm khai thác cấu trúc liên kết của hệ và đảm bảo ổn định tổng thể. Cách tiếp cận này phù hợp với các phương pháp điều khiển trượt cho hệ thiếu dẫn động đã được đề xuất trong các nghiên cứu trước (Utkin, 1992; Irfan et al., 2018).

$$S = S_\theta + \mathrm{w}_x S_x \quad (28)$$

Trong đó, $\mathrm{w}_x > 0$ là hệ số trọng số điều chỉnh mức độ ưu tiên giữa hai mục tiêu điều khiển. Cấu trúc mặt trượt này phù hợp với đặc tính ghép kênh của hệ con lắc ngược.

Đạo hàm theo thời gian của mặt trượt (28) được lấy, ta có:

$$\dot{S} = f\left(q,\dot{q}\right) + g\left(q\right)u_t + d\left(t\right) \quad (29)$$

Trong đó: $f(\cdot)$và $g(\cdot)$ là các hàm phi tuyến phụ thuộc động lực học hệ thống, còn $d\left(t\right)$biểu diễn nhiễu và bất định mô hình chưa biết, được giả thiết là bị chặn bởi một hằng số hữu hạn.

Trong điều khiển trượt cổ điển, tín hiệu điều khiển thường được tách thành $u_t = u_{eq} + u_{\mathrm{sw}}$ trong đó u_{eq} là thành phần điều khiển tương đương được xác định từ điều kiện $\dot{S} = 0$. Trong thực tế, việc xác định chính xác thành phần điều khiển tương đương u_{eq} đòi hỏi phải biết đầy đủ mô hình động lực học của hệ, điều này thường khó đảm bảo đối với các hệ phi tuyến có bất định tham số. Do đó, các luật điều khiển trượt giản lược đã được đề xuất trong nhiều nghiên cứu, không phụ thuộc mô hình nhằm nâng cao tính khả thi khi triển khai (Utkin, 1992; Slotine & Li, 1991).

Do đó, trong nghiên cứu này, thành phần điều khiển tương đương không được sử dụng. Thay vào đó, luật điều khiển trượt được thiết kế theo dạng giản lược, không phụ thuộc mô hình, như sau:

$$u_t = K_p + K_{\mathrm{sw}}\tanh(S) \quad (30)$$

Trong đó:

- $K_p > 0$ là hệ số khuếch đại tuyến tính nhằm tăng tốc độ hội tụ của sai số,

• $K_{sw} > 0$ là hệ số chuyển mạch đảm bảo điều kiện tiếp cận mặt trượt.

Việc sử dụng hàm $tanh(\cdot)$ thay cho hàm dấu $sign(\cdot)$ giúp làm mềm luật điều khiển, qua đó giảm hiện tượng rung (chattering) do chuyển mạch tần số cao, đồng thời vẫn duy trì được tính bền vững đặc trưng của phương pháp SMC.

Phân tích ổn định

Hàm Lyapunov ứng viên được xét:

$$V_1 = \frac{1}{2}S^2 \quad (31)$$

Đạo hàm theo thời gian của V dọc theo quỹ đạo hệ đã được lấy:

$$\dot{V} = S\dot{S} = S\left(f(q,\dot{q}) + g(q)u_t + d(t)\right) \quad (32)$$

Luật điều khiển (31) được thay vào (33), ta thu được:

$$\dot{V} = Sf(q,\dot{q}) + Sg(q)\left(K_p + K_{sw}\tanh(S)\right) + Sd(t)$$

Với giả thiết các thành phần $f(q,\dot{q})$ và $d(t)$ bị chặn, tồn tại các hằng số dương sao cho:

$$Sf(q,\dot{q}) \le c_1|S|, Sd(t) \le c_1|S| \quad (33)$$

Do đó, nếu chọn các hệ số K_p và K_{sw} đủ lớn để thỏa mãn:

$$K_{sw} > c_1 + c_2 \quad (34)$$

thì đạo hàm hàm Lyapunov thỏa mãn:

$$\dot{V} \le \eta|S| < 0, \forall S \ne 0 \quad (35)$$

Với $\eta > 0$ Theo lý thuyết ổn định Lyapunov, mặt trượt *S* hội tụ tiệm cận về 0. Do cấu trúc của mặt trượt (29), điều này kéo theo $e_\theta \to 0$ và $e_x \to 0$ khi $t \to \infty$.

Kết quả phân tích cho thấy bộ điều khiển trượt được thiết kế đảm bảo tính ổn định tiệm cận của mặt trượt và bền vững trước các bất định mô hình.

2.2.3. RISE

Để áp dụng RISE cho hệ bậc 2 như con lắc ngược, ta cần xây dựng một hệ thống lỗi bậc cao để đưa tín hiệu điều khiển vào đạo hàm bậc cao, từ đó tạo ra tín hiệu điều khiển trơn tru sau khi tích phân

Động lực học của hệ thống mô tả dưới dạng tổng quát (12) được xem xét:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = u + d_t$$

Trạng thái sai lệch vị trí e_1 và sai lệch phụ e_2, trạng thái trung gian r được đặt như (36), với q_d là vị trí mong muốn trong HTĐ chuẩn, α_1, α_2 là các hằng số thực dương.

$$e_1 = q_d - q; \quad e_2 = \dot{e}_1 + \alpha_1 e_1; \quad r = \dot{e}_2 + \alpha_2 e_2 \quad (36)$$

$$r(t) = \left(\ddot{q}_d - \ddot{q}\right) + \alpha_1\dot{e}_1 + \alpha_2 e_2 \quad (37)$$

Nhân hai vế với ma trận quán tính $M(q)$:

$$M(q)r = M(q)\ddot{q}_d - M(q)\ddot{q} + M(q)\left(\alpha_1\dot{e}_1 + \alpha_2 e_2\right) \quad (38)$$

Thay phương trình động lực học $M(q)\ddot{q}_d = u - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) - d_t$ vào:

$$\begin{aligned} M(q)r &= M(q)\ddot{q}_d - \left[\tau - C\dot{q} - G - \tau_d\right] + M(q)\left(\alpha_1\dot{e}_1 + \alpha_2 e_2\right) \\ M(q)r &= M(q)\ddot{q}_d + C\dot{q} + G + M(q)\left(\alpha_1\dot{e}_1 + \alpha_2 e_2\right) - \tau + \tau_d \end{aligned} \quad (39)$$

$S(\cdot)$ được đặt là hàm chứa toàn bộ động lực học mô hình:

$$S(\cdot) = M(q)\ddot{q}_d + C\dot{q} + G + M(q)\left(\alpha_1\dot{e}_1 + \alpha_2 e_2\right) \quad (40)$$

Phương trình động lực học lỗi trở thành:

$$M(q)r = S - u + d_t \quad (41)$$

Lấy đạo hàm theo thời gian của phương trình (41)

$$M(q)\dot{r} = \dot{S} - \dot{u} + d_t - \dot{M}(q)r \quad (42)$$

Có thể viết lại dưới dạng:

$$M(q)\dot{r} = -\frac{1}{2}\dot{M}(q)r + \tilde{N}(t) + N_d(t) - \dot{u} \quad (43)$$

• $\tilde{N}(t)$ bao gồm: đại lượng biết trước và thành phần sai lệch và được chặn trên $\left\|\tilde{N}(t)\right\| \le \rho\|z\|\|z\|$

• $N_d(t)$: Thành phần nhiễu loạn và bất định động học chưa biết. Yêu cầu quan trọng của RISE là $N_d(t)$ phải thuộc lớp C^2 và có các đạo hàm bị chặn.

Dựa trên kết quả phân tích ổn định theo tiêu chuẩn Lyapunov, trong nghiên cứu này luật điều khiển được lựa chọn dưới dạng (44), tương tự cấu

trúc được đề xuất bởi (Xian et al., 2004).

$$u(t) = (k_s + 1)e_2(t) - (k_s + 1)e_2(0) + \int_0^t \left[(k_s + 1)\alpha_2 e_2(\sigma) + \beta \operatorname{sgn}(e_2(\sigma)) \right] d\sigma \quad (44)$$

Trong đó: $k_s; \beta$ là các tham số thực dương. Từ (44) ta thấy luật điều khiển được lựa chọn thoả mãn tính chất (45). Việc tích phân hàm $sgn(\cdot)$ giúp đảm bảo cho u liên tục.

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= (k_s + 1)\dot{e}_2 - (k_s + 1)\alpha_2 e_2 + \beta \operatorname{sgn}(e_2) \\ \dot{u}(t) &= (k_s + 1)(\dot{e}_2 + \alpha_2 e_2) + \beta \operatorname{sgn}(e_2) \\ \dot{u}(t) &= (k_s + 1)r + \beta \operatorname{sgn}(e_2) \end{aligned} \quad (45)$$

$\dot{u}(t)$ được thay vào phương trình động lực học lỗi, ta có hệ vòng kín:

$$M(q)\dot{r} = -\frac{1}{2}\dot{M}r + \tilde{N} + N_d - (k_s + 1)r - \beta \operatorname{sgn}(e_2) \quad (46)$$

Tìm điều kiện để hệ thống điều khiển ổn định

Hàm Lyapunov được chọn:

$$V(t) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}r^2 M(q) + P(t) \quad (47)$$

Trong đó, hàm $P(t)$ được định nghĩa như (48), là hàm của các biến trạng thái.

$$P(t) = \beta e_2 - e_2(0)N_d(0) - \int_0^t L(\sigma)d\sigma \quad (48)$$

$$L(t) = r\left[N_d - \beta sign(e_2) \right]; \beta \geq \xi_1 + \frac{\xi_2}{\alpha_2}$$

Với việc chọn γ theo điều kiện (44), ta có thể chứng minh rằng $P(t)$ là hàm thực dương, tương tự kết quả đã được trình bày trong (Xian et al., 2004). Như vậy, $V(t) > 0$ với $\forall e_1, e_2, r, P$

Từ (48), ta tính được đạo hàm của $P(t)$:

$$\dot{P}(t) = -L(t) = -r\left[N_d - \beta \operatorname{sgn}(e_2) \right] \quad (49)$$

Vi phân hàm Lyapunov được lấy dọc theo quỹ đạo các trạng thái e_1, e_2, r, P:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + rM(q)\dot{r} + \frac{1}{2}\dot{M}r^2 + \dot{P}(t) \\ &= e_1(e_2 - \alpha_1 e_1) + e_2(r_2 - \alpha_2 e_2) \\ &+ r\left(\frac{1}{2}\dot{M}r + N_t + N_d - e_2 - \dot{\tau} \right) + \frac{1}{2}\dot{M}r^2 \\ &- r\left[N_d - \beta \operatorname{sgn}(e_2) \right] \\ &= e_1e_2 - \alpha_1 e_1^2 + re_2 - \alpha_2 e_2^2 + rN_t + rN_d - re_2 \\ &- r\left[k_s r + \beta \operatorname{sgn}(e_2) \right] - rN_d + r\beta \operatorname{sgn}(e_2) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\dot{V}(t) = e_1e_2 - \alpha_1 e_1^2 - \alpha_2 e_2^2 - k_s r^2 + r\tilde{N}_t \quad (51)$$

Bất đẳng thức Cauchy được sử dụng đối với e_1^2, e_2^2 và xét điều kiện $r\left|\tilde{N}_t\right| \leq \left|r\right|\left|\tilde{N}_t\right|$ ta có:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 - (\alpha_1 e_1^2 + \alpha_2 e_2^2) - k_s r^2 + |r|\left|\tilde{N}_t\right| \\ &\leq -\left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \right)e_1^2 - \left(\alpha_2 - \frac{1}{2} \right)e_2^2 - k_s r^2 + |r|\left(\xi_3 \|x\| + \xi_4 \|x\|^2 \right) \end{aligned} \quad (52)$$

Từ (52) ta thấy rằng nếu chọn λ theo (53):

$$\lambda = \min\left[\left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \right), \left(\alpha_2 - \frac{1}{2} \right), k_1 \right]; k_1 = k_s - k_2 \quad (53)$$

Bảng 1. Tham số điều khiển của các bộ điều khiển Backstepping, SMC và RISE

Bộ điều khiển	Tham số	Giá trị
Backstepping	k_1	0,15
SMC	λ_θ	4,5
	λ_x	0,7
	K_p	65
	K_{sw}	25
RISE	α_2	25
	α_x	0,7
	α_θ	4,5
	β	2
	K_s	65

Ghi chú: Thay vì tinh chỉnh thủ công cảm tính, các tham số điều khiển được xác định dựa trên một quy trình mang tính hệ thống dưới ràng buộc phần cứng. Cụ thể, trong Kịch bản 1 (điều kiện danh định), các hệ số được tăng dần để tối thiểu hóa sai số bám quỹ đạo, với biên điều kiện cứng là biên độ điện áp không được vượt quá giới hạn bão hòa. Bộ thông số đạt ngưỡng tối ưu biên này sau đó được giữ cố định hoàn toàn trong các kịch bản nhiễu và bất định (Kịch bản 2 và 3) nhằm đánh giá công bằng độ bền vững nội tại của từng cấu trúc điều khiển.

Như vậy, nếu chọn $\beta \geq \xi_1 + \frac{\xi_2}{2}, \alpha_1 > \frac{1}{2}$, $\alpha_2 > \frac{1}{2}$ và k_2 đủ lớn thì $\dot{V}(t) \leq -c\|x\|^2$ với c là một số thực dương và $x = [e_1 \quad e_2 \quad r)]^T$. Theo định lý Barbalat, $V(t)$ bị chặn dưới và $\dot{V}(t)$ là bán xác định âm và liên tục đều. Khi đó, hệ thống ổn định toàn cục, $x = [e_1 \quad e_2 \quad r)]^T \to 0$.

Các tham số của các bộ điều khiển Backstepping, SMC và RISE

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Để kiểm chứng hiệu năng và tính bền vững của ba luật điều khiển Backstepping, SMC và RISE, các mô phỏng được thực hiện trong môi trường MATLAB/Simulink trên mô hình động lực học phi tuyến đầy đủ của hệ con lắc ngược. Nhằm đảm bảo tính khách quan, tất cả các bộ điều khiển được áp dụng trên cùng một mô hình, với cùng điều kiện đầu, giới hạn cơ cấu chấp hành và các kịch bản mô phỏng. Điều kiện đầu được lựa chọn với góc con lắc lệch khỏi vị trí cân bằng thẳng đứng một giá trị $\theta(0) = \theta_0 \neq 0$, trong khi vị trí và vận tốc xe ban đầu được đặt bằng không. Việc lựa chọn điều kiện đầu như vậy nhằm đánh giá khả năng ổn định của các bộ điều khiển trong miền làm việc phi tuyến của hệ, thay vì chỉ quanh vùng tuyến tính hóa. Tín hiệu điều khiển được giới hạn trong khoảng từ -12V đến $+12$V để phản ánh điều kiện làm việc thực tế của cơ cấu chấp hành. Giới hạn bão hòa được áp dụng đồng nhất cho cả ba bộ điều khiển nhằm tránh làm sai lệch kết quả so sánh. Các chỉ tiêu đánh giá hiệu năng và tính bền vững bao gồm biên độ cực đại, thời gian xác lập, giá trị RMS và năng lượng điều khiển, được tính toán tự động trong quá trình mô phỏng.

Thông số danh định của hệ thống được thiết lập như sau:

Trên cơ sở đó, ba kịch bản mô phỏng được xây dựng, bao gồm: (i) điều kiện lý tưởng không nhiễu và không bất định tham số, (ii) trường hợp tồn tại bất định tham số của hệ và (iii) trường hợp có nhiễu ngoại sinh tác động, nhằm đánh giá toàn diện hiệu năng và tính bền vững của các luật điều khiển. Các tham số điều khiển được giữ nguyên như trình bày trong Bảng 1 nhằm đảm bảo tính khách quan trong so sánh hiệu năng.

Bên cạnh đó, để định lượng hóa mức độ đánh đổi giữa độ chính xác bám quỹ đạo và năng lượng điều khiển, chỉ số hiệu năng tổng hợp $J = \gamma_1 RMS_\theta + \gamma_2 RMS_x + \gamma_3 RMS_u$ đã được sử dụng. Trong đó $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ là các trọng số thiết kế kiêm hệ số chuẩn hóa thứ nguyên, được tinh chỉnh tùy thuộc vào mục tiêu ưu tiên của từng kịch bản mô phỏng thử nghiệm. Sau khi chuẩn hóa, các trọng số này được tinh chỉnh thủ công để phản ánh "sự đánh đổi" của hiệu năng và tính bền vững. Ví dụ: Khi bài toán đòi hỏi tiết kiệm năng lượng tuyệt đối, trọng số γ_3 được đẩy lên cao; ngược lại, nếu hệ thống ưu tiên an toàn và không được phép sai lệch vị trí, γ_1, γ_2 thì được chọn vượt trội hơn.

Bảng 2. Thông số danh định của hệ con lắc ngược

Ký hiệu	Mô tả	Giá trị	Đơn vị
M	Khối lượng xe goòng	0,5	kg
m	Khối lượng con lắc	0,12	kg
l	Khoảng cách từ trục quay đến trọng tâm con lắc	0,27	m
J	Mô men quán tính của con lắc tại trọng tâm	$\frac{ml^2}{3}$	kgm²
g	Gia tốc trọng trường	9,81	m/s²
k	Hệ số ma sát tuyến tính của xe	0,3	Ns/m
c	Hệ số ma sát tại trục quay con lắc	0,001	Nms/rad
u_{tmax}	Giới hạn điện áp điều khiển	±12	V

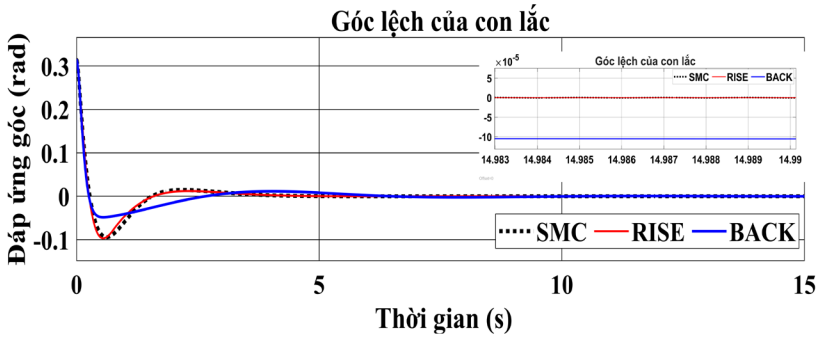
Ghi chú: Các thông số trên được lựa chọn dựa trên các giá trị thường dùng trong các nghiên cứu về hệ con lắc ngược, nhằm đảm bảo tính đại diện và khả năng so sánh kết quả với các công trình đã công bố.

3.1. Kịch bản 1: Bám quỹ đạo trong điều kiện lý tưởng

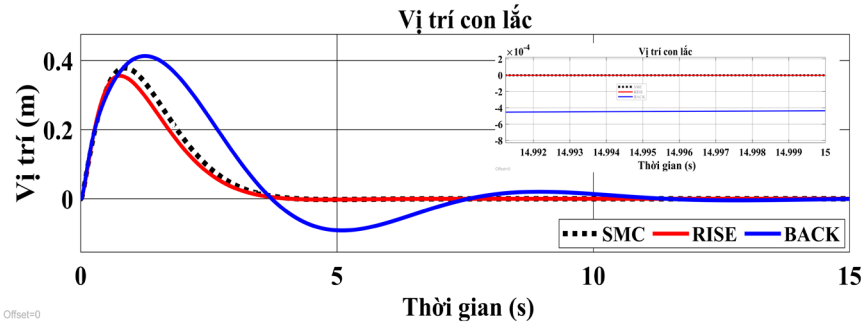
Trong kịch bản này, hệ thống hoạt động với thông số chính xác và không chịu tác động của nhiễu ngoài. Quỹ đạo đặt cho vị trí xe là $x = 0$, trong khi góc con lắc mong muốn là $\theta = 0$.

Kết quả mô phỏng tại Hình 3, Hình 4 và Hình 5 cho thấy cả ba bộ điều khiển đều hoàn thành tốt nhiệm vụ bám quỹ đạo trong điều kiện lý tưởng. Tuy nhiên, sự khác biệt thể hiện rõ ở tốc độ hội tụ, mức dao động và đặc tính tín hiệu điều khiển. Backstepping cho đáp ứng tương đối trơn với biên độ điều khiển thấp, song thời gian quá độ dài hơn và xuất hiện độ vọt lố nhỏ trước khi đạt trạng thái ổn định. SMC cho tốc độ đáp ứng nhanh hơn, nhưng tín hiệu điều khiển xuất hiện hiện tượng rung

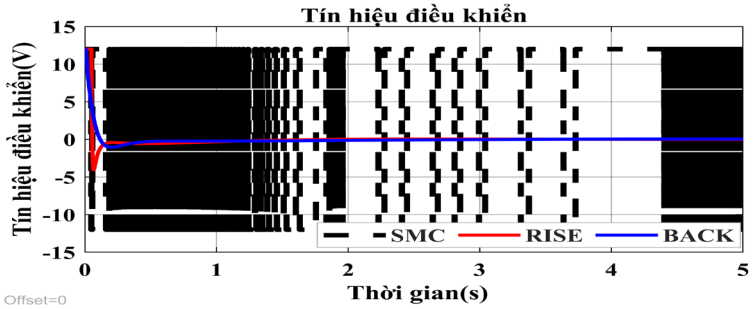
(chattering) ngay cả trong điều kiện không nhiễu, phản ánh đặc trưng của luật điều khiển trượt sử dụng hàm dấu. Trong khi đó, RISE thể hiện đáp ứng mượt hơn so với hai phương pháp còn lại, với sai số bám nhỏ và tín hiệu điều khiển hội tụ êm về 0, cho thấy khả năng triệt tiêu sai số tĩnh hiệu quả.



Hình 3. Góc lệch của con lắc kịch bản 1



Hình 4. Vị trí của xe kịch bản 1



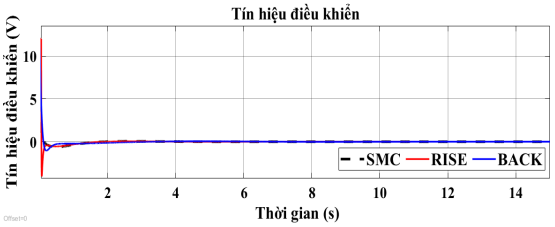
Hình 5. Tín hiệu điều khiển hàm *sign(S)*

Để giảm hiện tượng chattering của SMC, hàm sign(S) được thay thế bằng hàm tanh(S) và kết quả mô phỏng cải thiện rõ rệt độ trơn của tín hiệu điều khiển. Cách tiếp cận này cũng được áp dụng nhất quán trong các kịch bản tiếp theo nhằm đảm bảo so sánh công bằng giữa các bộ điều khiển.

Các chỉ tiêu đánh giá định lượng tương ứng được tổng hợp trong Bảng 3:

Chú thích dùng cho các Bảng 3, Bảng 4 và Bảng-5: Trong các bảng, $|\theta|_{\max}$ (rad), $|x|_{\max}$ (m) và $|u_t|_{\max}$ (V) lần lượt là giá trị cực đại theo trị tuyệt đối của góc lệch con lắc vị trí xe và tín hiệu điều khiển; $T_{b\theta}$ s) và T_{bx} (s) là thời gian xác lập tương ứng; $RMS(\theta)$ (rad), $RMS(x)$ (m) và $RMS(u_t)$ (V) là giá trị căn trung bình bình phương của các tín hiệu; $\Delta\theta_{pp}$ (rad) và Δx_{pp} (m) là biên độ dao động đỉnh–đỉnh trong các khoảng thời gian có nhiễu (chỉ áp dụng cho các kịch bản có nhiễu). Thời gian xác lập được xác định là thời điểm đáp ứng lần đầu tiên đi vào và duy trì trong dải sai số ±2% quanh giá trị xác lập. Các chỉ tiêu $\Delta\theta_{pp}$ và Δx_{pp} được tính trong các khoảng thời gian

có nhiễu tương ứng, trong khi các chỉ tiêu còn lại được tính trên toàn bộ thời gian mô phỏng.



Hình 6. Tín hiệu điều khiển hàm *tanh(S)*

Bảng 3. So sánh các chỉ tiêu định lượng của ba bộ điều khiển trong điều kiện mô hình chuẩn

Thông số	Back stepping	SMC	RISE
$\|\theta\|_{\max}$ (rad)	0,3141	0,3141	0,3141
$T_{b\theta}$ (s)	8,685	4,258	4,24
$RMS(\theta)$ (rad)	0,0267	0,0285	0,0266
$\|x\|_{\max}$ (m)	0,4133	0,3689	0,3426
T_{bx} (s)	14,717	5,912	6,015
$RMS(x)$ (m)	0,1453	0,1062	0,0996
$\|u_t\|_{\max}$ (V)	13,307	12	12
$RMS(u_t)$(V)	0,5498	0,6195	0,7405

Bảng 3 tổng hợp các chỉ tiêu định lượng nhằm làm rõ sự khác biệt về tốc độ hội tụ, dao động và năng lượng điều khiển giữa các bộ điều khiển. Trước hết, cả ba bộ điều khiển đều ổn định tốt hệ thống từ góc lệch ban đầu 0,3141 rad. Tuy nhiên, SMC và RISE thể hiện tốc độ hội tụ vượt trội với thời gian xác lập góc chỉ còn 4,258 s và 4,24 s (giảm 51%so với 8,685 s của Backstepping). RISE đồng thời kiểm soát dao động tốt nhất với rad. Đối với bài toán điều khiển vị trí xe, sự khác biệt giữa các bộ điều khiển trở nên rõ rệt hơn. Backstepping bộc lộ hạn chế khi độ lệch cực đại lên tới 0,4133 m và thời gian xác lập kéo dài 14,717 s (gấp 2,5 lần SMC và RISE). Ngược lại, RISE duy trì vị trí bám sát nhất với $RMS(x)$= 0,0996 m, giảm lần lượt và so với SMC và Backstepping. Đổi lại cho tốc độ đáp ứng nhanh, SMC và RISE đòi hỏi mức năng lượng lớn hơn, trong khi Backstepping tạo ra tín hiệu điều khiển trơn với mức tiêu thụ thấp nhất ($RMS(u)$= 0,5498 V). Khi xét theo chỉ số J : Nếu bài toán đặt trọng tâm vào việc tiết kiệm tối đa năng lượng cơ cấu chấp hành ($\gamma_1 = 10; \gamma_2 = 1; \gamma_3 = 50$) thì Backstepping là phương án tối ưu nhất ($J = 27,9$). Tuy nhiên, nếu hệ thống yêu cầu sự cân bằng giữa đáp ứng nhanh và năng lượng vừa phải ($\gamma_1 = 20; \gamma_2 = 10; \gamma_3 = 5$) thì SMC là lựa chọn dung hòa tốt nhất ($J = 4,72$) so với RISE ($J = 5,23$) và Backstepping ($J = 4,73$).

3.2. Kịch bản 2: Khả năng kháng nhiễu

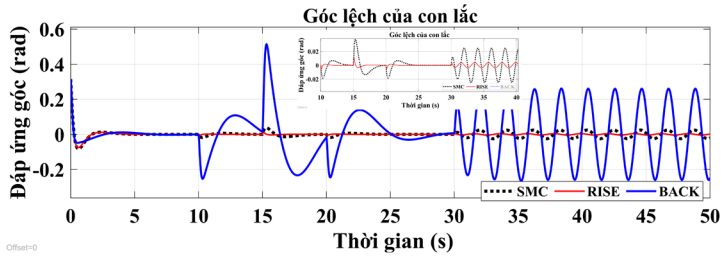
Kịch bản này thực hiện mô phỏng Monte Carlo với 100 mẫu thử ngẫu nhiên nhằm lượng hóa chính xác khả năng dập dao động và hiệu suất năng lượng của các thuật toán điều khiển trước các biến động không lường trước từ môi trường. Quy trình thử nghiệm được chia thành ba giai đoạn chiến lược:

• *Giai đoạn 1: Khởi động và ổn định (0s - 10s)* không có nhiễu, thông số mô hình chuẩn.

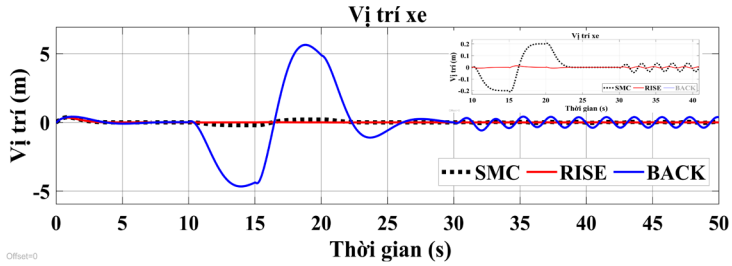
• *Giai đoạn 2: Nhiễu tác động ngẫu nhiên - " nhiễu xung dạng bước" (10s - 30s):* Giả lập trường hợp có lực tác động đột ngột vào xe (ví dụ: lực ngoại sinh tác động đột ngột) thông qua các tín hiệu bước có biên độ ngẫu nhiên hóa quanh ngưỡng d = ±10±0.2 N; tại t = 20s -30s: ngắt lực này để hệ thống tự phục hồi

• *Giai đoạn 3: Nhiễu môi trường liên tục - " lực ngoại sinh tác động đột ngột" (30s - 50s):* Các tác động liên tục như gió hoặc bề mặt di chuyển không được mô phỏng bằng phẳng bằng tín hiệu nhiễu hình sin. Để đảm bảo tính khách quan thống kê, biên độ và tần số nhiễu được ngẫu nhiên hóa quanh giá trị danh định d= 5sin(3t-20), cho phép phân tích sự phân tán của các chỉ tiêu hiệu năng như sai số bám quỹ đạo *RMS*, biên độ đỉnh-đỉnh Δ_{pp} và hàm mục tiêu J_{mean}.

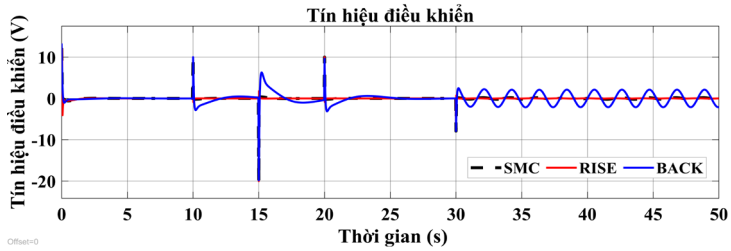
Kết quả mô phỏng tại Hình 7, Hình 8 và Hình 9 cho kịch bản 2 với tín hiệu bước và tín hiệu nhiễu liên tục cho thấy sự phân hóa rõ rệt về hiệu suất điều khiển. Trong giai đoạn nhiễu dạng bước, Backstepping cho thấy độ nhạy cao với nhiễu, đồng thời khả năng phục hồi chậm. SMC cải thiện đáng kể biên độ sai số so với Backstepping. Ngược lại, RISE chỉ xuất hiện một đỉnh vọt lố ngắn khi nhiễu tác động và nhanh chóng đưa hệ trở về trạng thái cân bằng nhờ cơ chế tích phân sai số phi tuyến. Trong giai đoạn nhiễu biến thiên liên tục, sự khác biệt giữa các phương pháp trở nên rõ rệt hơn. Backstepping và SMC không thể triệt tiêu hoàn toàn nhiễu, dẫn đến dao động duy trì của góc con lắc và vị trí xe với tần số tương ứng với nhiễu tác động. Ngược lại, RISE duy trì sai số ở mức rất nhỏ, gần như không đáng kể, cho thấy khả năng xấp xỉ và bù trừ hiệu quả nhiễu ngoại sinh trơn.



Hình 7. Góc lệch của con lắc kịch bản 2



Hình 8. Vị trí xe kịch bản 2



Hình 9. Tín hiệu điều khiển kịch bản 2

Bảng 4. Các chỉ tiêu đánh giá khả năng kháng nhiễu của ba bộ điều khiển trong kịch bản 2

Thông số	Backstepping	SMC	RISE
Giai đoạn 2 nhiễu dạng bước			
$\lvert\theta\rvert_{\max}$ (rad)	0.3299 ± 0.0399	0.0352 ± 0.0040	0.0123 ± 0.0041
$RMS(\theta)$ (rad)	0.0868 ± 0.0301	0.0076 ± 0.0009	0.0014 ± 0.0004
$\Delta\theta_{pp}$ (rad)	0.6934 ± 0.0589	0.0528 ± 0.0059	0.0181 ± 0.0063
$\lvert x\rvert_{\max}$ (m)	4.6378 ± 0.4231	0.1975 ± 0.0223	0.0127 ± 0.0023
$RMS(x)$ (m)	1.8934 ± 0.5203	0.1170 ± 0.0132	0.0039 ± 0.0005
Δx_{pp} (m)	8.6448 ± 0.7727	0.3910 ± 0.0441	0.0190 ± 0.0030
$\lvert u_t\rvert_{\max}$ (V)	18.71 ± 1.48	17.85 ± 2.01	18.64 ± 2.02
$RMS(u_t)$(V)	0.9754 ± 0.2043	0.2305 ± 0.0260	0.2629 ± 0.0295
Giai đoạn 3 nhiễu biến thiên			
$\lvert\theta\rvert_{\max}$ (rad)	0.3076 ± 0.0370	0.0261 ± 0.0031	0.0040 ± 0.0005
$RMS(\theta)$ (rad)	0.1846 ± 0.0215	0.0173 ± 0.0020	0.0027 ± 0.0004
$\Delta\theta_{pp}$ (rad)	0.5850 ± 0.0691	0.0513 ± 0.0060	0.0079 ± 0.0010
$\lvert x\rvert_{\max}$ (m)	1.0124 ± 0.1332	0.0624 ± 0.0083	0.0067 ± 0.0008
$RMS(x)$ (m)	0.4321 ± 0.0481	0.0270 ± 0.0042	0.0040 ± 0.0005

Thông số	Backstepping	SMC	RISE
Δx_{pp} (m)	1.5272 ± 0.2200	0.0992 ± 0.0141	0.0124 ± 0.0015
$\lvert u_t \rvert_{\max}$ (V)	2.66 ± 0.71	0.20 ± 0.02	0.08 ± 0.01
$RMS(u_t)$ (V)	1.4995 ± 0.1812	0.1372 ± 0.0158	0.0219 ± 0.0031

Bảng 4 trình bày kết quả phân tích thống kê Monte Carlo qua 100 mẫu thử độc lập.

Giai đoạn 2: Nhiễu dạng bước

Trong điều kiện nhiễu tác động đột ngột, bộ điều khiển Backstepping bộc lộ sự thiếu ổn định nghiêm trọng với biên độ dao động vị trí đỉnh-đỉnh trung bình đạt Δx_{pp} = 8,6448±0,7727 m. Mức độ phân tán dữ liệu lớn này cho thấy cấu trúc Backstepping không đủ khả năng duy trì quỹ đạo ổn định khi đối mặt với các xung lực mạnh. Ngược lại, các phương pháp điều khiển bền vững thể hiện ưu thế bám vượt trội. Bộ điều khiển SMC giới hạn được biên độ dao động vị trí ở mức Δx_{pp} = 0,3910±0,0004 m. Đặc biệt, bộ điều khiển RISE đạt hiệu suất cao nhất khi duy trì ở mức cực thấp Δx_{pp} = 0,019±0,003 m và sai số góc $RMS(\theta)$=0,0014±0,0004 rad. Khi lượng hóa bằng chỉ số hiệu năng J_{mean} ở chế độ thiết kế ưu tiên kháng nhiễu $\gamma_1 = 50; \gamma_2 = 20; \gamma_3 = 5$,, RISE đạt giá trị tối ưu là J_{mean}=1,46 , thấp hơn đáng kể so với SMC J_{mean}=3,87 và Backstepping J_{mean}=47,09.

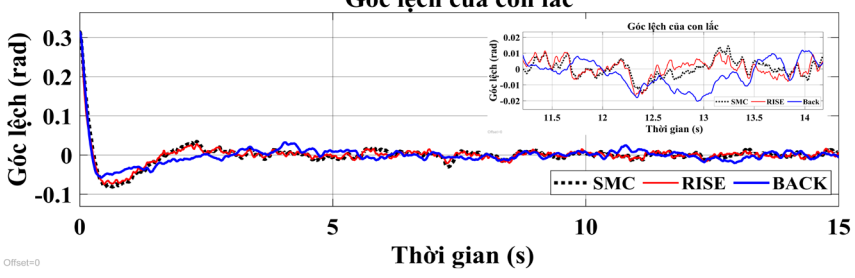
Giai đoạn 3: Nhiễu biến thiên liên tục

Khi hệ thống chịu tác động của nhiễu dao động liên tục, sự khác biệt về khả năng triệt tiêu nhiễu cao tần giữa các thuật toán trở nên rõ rệt. Bộ điều khiển RISE duy trì sai số bám vị trí ở mức milimet $RMS(x)$=0,004±0,0005 m với biên độ dao động đỉnh-đỉnh tối thiểu Δx_{pp} = 0,0124±0,0015 m. Về khía cạnh năng lượng, RISE thể hiện sự tối ưu hóa năng lượng vượt trội trong giai đoạn này với $RMS(u_t)$=0,0219±0,0031 V, chỉ bằng khoảng 16% so với SMC và 1,4% so với Backstepping. Do đó, chỉ số hiệu năng tổng hợp của RISE đạt mức là J_{mean}=0,32, vượt trội hơn SMC J_{mean}=2,09 và Backstepping J_{mean}=25,37.

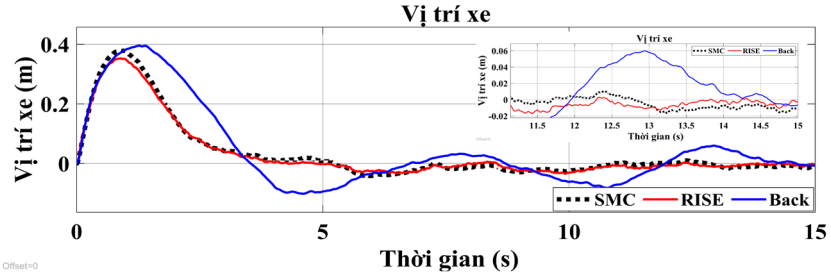
Kết quả chứng minh khâu tích phân phi tuyến trong RISE hoạt động như một cơ chế lọc và bù trừ nhiễu cực kỳ hiệu quả. RISE vượt trội hoàn toàn khi vừa dập tắt nhiễu đột ngột nhanh chóng, vừa bám sát quỹ đạo êm ái dưới nhiễu liên tục; SMC cho hiệu năng kháng nhiễu ở mức khá nhưng sinh ra dao động dư và tốn năng lượng hơn khi duy trì cân bằng; Backstepping bộc lộ rõ sự suy giảm chất lượng nghiêm trọng, đặc biệt là mất kiểm soát vị trí xe khi bị nhiễu tác động.

Trong thực tế, sai số đo và nhiễu từ các cảm biến đo lường cũng là một yếu tố quan trọng ảnh hưởng đến chất lượng điều khiển, thông qua các tín hiệu phản hồi. Vì vậy, để hoàn thiện quá trình đánh giá, việc xem xét trường hợp nhiễu đo lường được đưa vào các tín hiệu phản hồi của hệ thống tiếp tục được thực hiện.

Kết quả mô phỏng từ Hình 10 và Hình 11 có thể quan sát thấy rằng nhiễu đo lường gây xuất hiện các dao động cao tần trên tín hiệu góc lệch con lắc và vị trí xe, đặc biệt trong giai đoạn xác lập. Mặc dù vậy, cả ba bộ điều khiển đều duy trì được trạng thái của hệ thống dao động quanh điểm cân bằng mà không xuất hiện hiện tượng mất ổn định hay trôi trạng thái, cho thấy các phương pháp điều khiển được đề xuất vẫn đảm bảo tính ổn định của hệ thống trong điều kiện tín hiệu phản hồi bị nhiễu.



Hình 10. Góc lệch của con lắc có nhiễu đo lường



Hình 11. Vị trí xe có nhiễu đo lường

Bảng 5. So sánh các chỉ tiêu định lượng của ba bộ điều khiển trong điều kiện có nhiễu đo lường

Thông số	Backstepping	SMC	RISE
$\lvert\theta\rvert_{\max}$ (rad)	0,3141± 0,0000	0,3141± 0,0000	0,3141± 0,0000
$RMS(\theta)$ (rad)	0,0284 ± 0,0005	0,0302 ± 0,0006	0,0274 ± 0,0004
$\lvert x\rvert_{\max}$ (m)	0,4240 ± 0,0188	0,3706 ± 0,0100	0,3429 ± 0,0076
$RMS(x)$ (m)	0,1522 ± 0,0067	0,1058 ± 0,0040	0,1005 ± 0,0032
$\lvert u_t\rvert_{\max}$ (V)	12,00 ± 0,00	12,00 ± 0,00	12,00 ± 0,00
$RMS(u_t)$(V)	4,2830 ± 0,0244	11,0554 ± 0,0170	10,6961 ± 0,0170

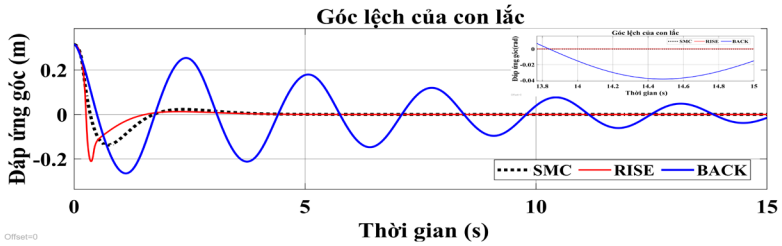
Bảng 5 trình bày kết quả phân tích thống kê Monte Carlo qua 100 mẫu thử độc lập, trong đó nhiễu đo lường được mô phỏng bằng các tín hiệu nhiễu trắng băng thông giới hạn (Band-limited White Noise) với hạt giống (seed) thay đổi ngẫu nhiên trong mỗi vòng lặp. Các thành phần nhiễu này được thiết lập với mật độ phổ công suất (Noise Power) lần lượt là 10^{-6} cho kênh góc và 10^{-5} cho kênh vị trí, tác động ở dải tần số cao tương ứng với bước thời gian lấy mẫu T_s =0,001 s. Việc duy trì biên độ nhiễu danh định nhưng thay đổi đặc tính mẫu ngẫu nhiên cho phép lượng hóa chính xác sai số trung bình và độ lệch chuẩn, qua đó đánh giá khách quan độ nhạy cao tần và tính ổn định của các bộ điều khiển trước những tín hiệu phản hồi không lý tưởng từ cảm biến thực tế. Kết quả thống kê cho thấy nhiễu đo lường gây ra dao động cao tần trên toàn hệ thống, nhưng cả ba bộ điều khiển vẫn duy trì được trạng thái ổn định quanh điểm cân bằng. Về chất lượng ổn định trạng thái, RISE thể hiện ưu thế về độ tin cậy với sai số góc trung bình thấp nhất $RMS(\theta) = 0,0278 \pm 0,0005$ rad. Ngược lại, SMC bộc lộ độ nhạy cao nhất trước nhiễu đo lường khi giá trị $RMS(\theta)$ trung bình tăng xấp xỉ 20% so với điều kiện lý tưởng đạt $RMS(\theta) = 0,0341 \pm 0,0012$ rad. Đối với kênh vị trí, ảnh hưởng của nhiễu đo lường không quá rõ rệt cho cả ba phương pháp. Tuy nhiên, giá trị $RMS(u_t)$ của SMC và RISE gia tăng mạnh tăng lên 11.0554±0.0170 và 10.6961± 0.0170 (gấp hơn 14 lần so với điều kiện danh định). Về mặt bản chất, hiện tượng này bắt nguồn từ việc nhiễu cao tần kích thích liên tục khâu chuyển mạch trong SMC và hàm *sign* trong khâu tích phân của RISE, dẫn đến hiện tượng dao động tần số cao ở tín hiệu điều khiển. Bộ điều khiển Backstepping ít nhạy cảm với nhiễu cao tần nên cho mức tiêu thụ năng lượng thấp nhất $RMS(u_t)$= 4,3366±0,0244 V. Khi định lượng bằng chỉ số hiệu năng tổng hợp J_{mean} ở chế độ thiết kế ưu tiên kháng nhiễu $\gamma_1 = 50; \gamma_2 = 20; \gamma_3 = 5$, sự đánh đổi giữa các mục tiêu thể hiện rõ rệt: Backstepping đạt giá trị J_{mean} =25,89 nhỏ nhất do thuật toán không phản ứng mạnh với nhiễu nhờ duy trì được tín hiệu điều khiển trơn. Trái lại, SMC J_{mean} =59,26 và RISE J_{mean} =57,01 do hệ thống liên tục sinh ra tín hiệu điều khiển lớn để duy trì ổn định. Xét trong cùng điều kiện tác động của nhiễu đo lường, RISE vẫn cho thấy tính ưu việt hơn SMC nhờ khả năng giới hạn sai số góc và vị trí hiệu quả hơn hẳn. Giữa hai phương pháp bền vững, RISE đạt hiệu năng tổng hợp tốt hơn SMC. Kết quả này khẳng định rằng: trong môi trường có nhiễu đo lường, RISE là chiến lược tối ưu hơn về hiệu năng dù phải chấp nhận đánh đổi bằng nỗ lực điều khiển lớn để bù trừ các kích thích cao tần từ cảm biến.

Trong thực tế, tín hiệu đo từ cảm biến thường được xử lý thông qua các kỹ thuật lọc hoặc ước lượng trạng thái (ví dụ bộ lọc thông thấp hoặc bộ lọc Kalman) trước khi đưa vào bộ điều khiển nhằm giảm

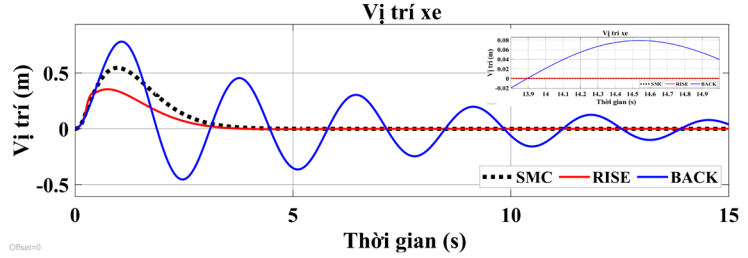
nhiễu cao tần và cải thiện độ tin cậy của phản hồi. Kết quả mô phỏng chưa sử dụng bộ lọc trong nghiên cứu này thể hiện một điều kiện bất lợi, đồng thời nhấn mạnh khả năng duy trì ổn định của các bộ điều khiển khi đối mặt với nhiễu đo.

3.3. Kịch bản 3: Kiểm chứng tính bền vững với bất định tham số lớn

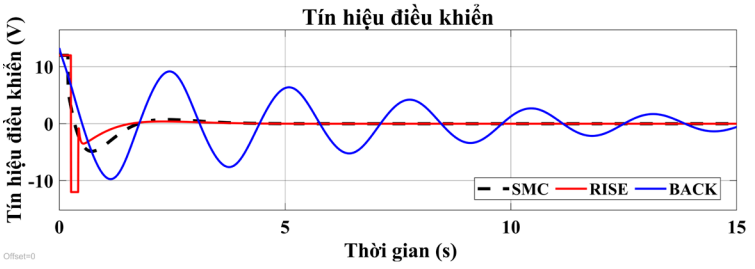
Trong kịch bản kiểm chứng thứ ba, tính bền vững của các bộ điều khiển được thử thách dưới điều kiện bất định tham số. Cụ thể, khối lượng thực tế của con lắc trong mô hình đối tượng được thay đổi ngẫu nhiên từ 0,12 kg đến 3 kg, nhằm mô phỏng các sai lệch vật lý không lường trước trong thực tế.



Hình 12. Góc lệch của con lắc khi m =3 kg



Hình 13. Vị trí xe khi m =3 kg



Hình 14. Tín hiệu điều khiển khi m = 3 kg

Kết quả mô phỏng khi khối lượng con lắc m = 3 kg tức là tăng 2400% tại Hình 12, Hình 13 và Hình -14 cho thấy sự khác biệt rõ rệt về hiệu suất điều khiển giữa ba phương pháp. Bộ điều khiển Backstepping, do phụ thuộc mạnh vào mô hình danh định, không còn đảm bảo chất lượng bám quỹ đạo khi tham số hệ thống thay đổi lớn, dẫn đến sai số xác lập đáng kể. SMC vẫn duy trì được tính ổn định nhờ đặc tính bền vững vốn có, tuy nhiên xuất hiện sai số tĩnh do biên độ tín hiệu điều khiển không đủ để bù đắp hoàn toàn mô-men trọng lực gia tăng. Ngược lại, RISE thể hiện khả năng thích nghi vượt trội: mặc dù xuất hiện quá điều chỉnh trong giai đoạn đầu. Tín hiệu điều khiển của RISE duy trì trong giới hạn cho phép và ổn định dần theo thời gian, cho thấy tính khả thích nghi và bền vững của phương pháp ngay cả trong điều kiện bất định tham số lớn.

Các chỉ tiêu đánh giá định lượng tương ứng được tổng hợp trong Bảng 6:

Kết quả so sánh trên Bảng 6 cho thấy dưới tác động của bất định tham số ngẫu nhiên (khối lượng con lắc biến thiên từ +0% đến +2400%), kết quả thống kê Monte Carlo qua 100 lần chạy chỉ ra rằng cả ba hệ thống đều duy trì được trạng thái ổn định. Tuy nhiên, mức độ phân tán hiệu năng có sự khác biệt sâu sắc. Backstepping bộc lộ tính nhạy cảm cao nhất với sai lệch mô hình, thể hiện qua giá trị trung bình và độ lệch chuẩn rất lớn ở cả dao động góc

$RMS(\theta) = 0,024 \pm 0,0179$ rad và vị trí $RMS(\theta) = 0,156 \pm 0,0228$ m. Giữa hai phương pháp điều khiển bền vững, kết quả đánh giá thống kê cho thấy RISE toàn diện hơn SMC. Về dao động góc đỉnh-đỉnh, RISE kiểm soát tốt hơn với $\Delta\theta_{pp} = 0,3947 \pm 0,0146$ rad, so với $\Delta\theta_{pp} = 0,4093 \pm 0,0141$ rad của SMC. Đặc biệt tại kênh vị trí, RISE thể hiện sự vượt trội tuyệt đối khi giới hạn độ lệch cực đại ở mức $|x|_{\max} = 0,3361 \pm 0,0058$ m và $RMS(x) = 0,0978 \pm 0,001$ m. Độ lệch chuẩn của RISE tại kênh vị trí chỉ ở mức 1mm ($\pm 0,001$ m) là minh chứng định lượng sắc bén nhất cho sự ưu việt của cấu trúc Lyapunov: khâu tích phân phi tuyến $\int(k_s r + \beta sign(e_2))$ hoạt động như một cơ chế tự động học, bù trừ chính xác mọi giá trị khối lượng ngẫu nhiên mà không làm phân tán hiệu năng. Ngược lại, SMC bộc lộ hạn chế do giới hạn bão hòa điện áp V, khiến hệ số chuyển mạch không thể cung cấp đủ lực tức thời, dẫn đến sai số vị trí trung bình cao và kém ổn định hơn $RMS(x) = 0,1137 \pm 0,0124$ m. Xét về khía cạnh năng lượng, SMC tiêu thụ mức trung bình thấp nhất $RMS(u_t) = 0,96 \pm 0,31$ V do tín hiệu điều khiển sớm chạm ngưỡng bão hòa, dẫn đến sự tồn tại của sai số xác lập. Trong khi đó, RISE duy trì mức năng lượng cao hơn $RMS(x) = 0,103 \pm 0,3$ V nhằm đảm bảo nỗ lực bù trừ bất định thông qua cơ chế tích phân phi tuyến. Khi đánh giá bằng chỉ số hiệu năng trung bình J_{mean} ở chế độ ưu tiên bám quỹ đạo và kháng nhiễu $\gamma_1 = 50; \gamma_2 = 20; \gamma_3 = 5$, mức tiết kiệm điện áp của SMC không bù đắp được sự gia tăng sai số vị trí. Kết quả cho thấy RISE đạt giá trị hiệu năng tổng hợp tối ưu nhất $J_{mean} = 8,59$ (so với 8,71 của SMC và 11,14 của Backstepping). Các dữ liệu thống kê minh chứng rằng trong điều kiện bất định tham số ngẫu nhiên, RISE là chiến lược điều khiển hiệu quả, đảm bảo tính nhất quán cao về chất lượng đáp ứng và tối ưu hóa sự đánh đổi giữa độ chính xác và hiệu năng.

Bảng 6. So sánh các chỉ tiêu bền vững của ba bộ điều khiển dưới bất định tham số lớn

Thông số	Backstepping	SMC	RISE
$\|\theta\|_{\max}$ (rad)	0,3142 ± 0,0000	0,3142 ± 0,0000	0,3142 ± 0,0000
$RMS(\theta)$ (rad)	0,0424 ± 0,0179	0,0327 ± 0,0040	0,0296 ± 0,0030
θ_{pp} (rad)	0,4268 ± 0,0595	0,4093 ± 0,0141	0,3947 ± 0,0146
$\|x\|_{\max}$ (m)	0,5312 ± 0,1093	0,3981 ± 0,0469	0,3361 ± 0,0058
$RMS(x)$ (m)	0,1560 ± 0,0228	0,1137 ± 0,0124	0,0978 ± 0,0010
x_{pp} (m)	0,6509 ± 0,1881	0,3988 ± 0,0464	0,3385 ± 0,0059
$\|u_t\|_{\max}$ (V)	12,00	12,00	12,00
$RMS(u_t)$(V)	1,18 ± 0,76	0,96 ± 0,31	1,03 ± 0,30

3.4. Phân tích chi phí tính toán và tính khả thi khi triển khai thực nghiệm

Việc chuyển đổi các thuật toán điều khiển từ môi trường mô phỏng liên tục (liên tục về thời gian và biên độ) sang nền tảng vi điều khiển số (rời rạc và lượng tử hóa) đòi hỏi sự đánh giá khắt khe về khối lượng tính toán và yêu cầu bộ nhớ. Đối với hệ phi tuyến thiếu dẫn động và nhạy cảm như con lắc ngược, trễ tính toán và trễ truyền thông có thể sinh ra hiện tượng trễ pha trong tín hiệu điều khiển. Hiện tượng này làm sai lệch lực tác động thực tế so với yêu cầu, dẫn đến kéo dài thời gian quá độ, gây rung lắc mạnh, hoặc thậm chí phá vỡ chu kỳ vòng kín làm mất ổn định toàn cục của hệ thống.

Để đánh giá tính khả thi, chi phí tính toán lý thuyết của ba chiến lược điều khiển trong một chu kỳ lấy mẫu được thống kê chi tiết tại Bảng 7, dựa trên phương trình tín hiệu điều khiển nguyên bản.

Từ các số liệu trên, đặc tính tài nguyên của từng phương pháp được phân tích như sau: Backstepping: Điều này đòi hỏi khối lượng tính toán dấu phẩy động cao nhất. Do phải tính toán trực tiếp các thành phần động lực học của mô hình, thuật toán yêu cầu nhiều phép tính lượng giác và nhân chia phức tạp. Dù vậy, cấu trúc thuật toán mang tính đại số tức thời không yêu cầu cấp phát bộ nhớ tĩnh (RAM). SMC: Cấu trúc mặt trượt rất gọn nhẹ về số lượng phép toán cơ bản. Tuy nhiên, việc sử dụng hàm để triệt tiêu hiện tượng chattering yêu cầu vi xử lý phải thực thi các chuỗi

khai triển Taylor cho hàm mũ, tiêu tốn khá nhiều chu kỳ máy nếu không có bộ xử lý toán học chuyên dụng. Phương pháp này cũng không tiêu tốn RAM. RISE: Sở hữu tổng số chu kỳ máy thấp nhất và đơn giản nhất về mặt tính toán. Thuật toán loại bỏ hoàn toàn các hàm lượng giác và hàm mũ phức tạp. Hàm dấu thực chất chỉ là một lệnh rẽ nhánh điều kiện logic (if/else) tốn tối đa 3 - 5 chu kỳ máy. Tuy nhiên, do cần thực hiện khâu tích phân rời rạc nên RISE đòi hỏi một lượng RAM tối thiểu để lưu trữ giá trị tích lũy sai số qua từng chu kỳ.

Bảng 7. Thống kê ước tính chi phí tính toán của các thuật toán trong một chu kỳ điều khiển

Loại phép toán / Tài nguyên	Back stepping	SMC	RISE
Cộng / Trừ (+, -)	28	6	12
Nhân / Chia (*, /)	35	6	10
Hàm lượng giác ()	4	0	0
Hàm phi tuyến	0	1	1
Biến trạng thái nhớ (RAM)	0	0	1
Ước tính số chu kỳ máy (Cycles)	~ 600 - 800	~ 150 - 200	~ 80 - 120

Để vận hành các bộ điều khiển này, hệ thống yêu cầu độ phân giải dữ liệu cao để tránh sai số lượng tử hóa. Nếu triển khai trên các dòng vi điều khiển 8-bit kiến trúc cũ thì vi xử lý phải sử dụng phần mềm để mô phỏng các phép toán dấu phẩy động, dẫn đến thời gian thực thi có thể kéo dài hàng nghìn chu kỳ máy và gây ra trễ truyền thông nghiêm trọng. Do đó, để đảm bảo tính thời gian thực với chu kỳ lấy mẫu khắt khe, việc triển khai các thuật toán này trên dòng vi điều khiển nhúng 32-bit kiến trúc ARM Cortex-M4/M7 có tích hợp bộ xử lý toán học dấu phẩy động phần cứng như họ STM32F4 hoặc STM32G4 đã được khuyến nghị. Với sức mạnh của FPU, thời gian thực thi toàn bộ vòng lặp điều khiển được ước tính chưa tới tại tần số. Điều này triệt tiêu hoàn toàn độ trễ tính toán, đảm bảo hiệu năng thực nghiệm bám sát tối đa với kết quả mô phỏng.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, kết quả so sánh hiệu năng và tính bền vững của ba bộ điều khiển phi tuyến Backstepping, SMC và RISE trên mô hình con lắc ngược thông qua các kịch bản mô phỏng đã được trình bày. Đóng góp cốt lõi của nghiên cứu là việc phân tích toàn diện sự đánh đổi giữa độ chính xác, tính bền vững và hiệu suất năng lượng dưới các điều kiện có nhiễu và bất định tham số. Thông qua các kịch bản mô phỏng, kết quả cho phép rút ra các kết luận quan trọng sau:

Tính bền vững và ổn định: Cả ba bộ điều khiển đều duy trì được khả năng ổn định hệ thống quanh điểm cân bằng thẳng đứng. Tuy nhiên, bộ điều khiển Backstepping bộc lộ tính nhạy cảm cao nhất đối với các sai lệch mô hình và nhiễu tác động. Trong khi đó, bộ điều khiển RISE và SMC thể hiện ưu thế bám quỹ đạo vượt trội nhờ cơ cấu bù trừ phi tuyến.

Hiệu năng tổng hợp định lượng: Kết quả phân tích thống kê Monte Carlo qua 100 lần chạy ngẫu nhiên khẳng định bộ điều khiển RISE đạt hiệu suất tối ưu nhất. Xét trên chỉ số hiệu năng, RISE đạt giá trị thấp nhất trong hầu hết các kịch bản. Đặc biệt, độ lệch chuẩn cực nhỏ của RISE tại các kênh trạng thái minh chứng cho tính nhất quán cao của khâu tích phân phi tuyến trong việc triệt tiêu dao động.

Sự đánh đổi năng lượng và chất lượng: Backstepping phù hợp cho các hệ thống có mô hình chính xác cao nhờ khả năng tiết kiệm năng lượng điều khiển trung bình. Ngược lại, RISE đạt được sự cân bằng lý tưởng giữa độ chính xác bám và nỗ lực điều khiển hợp lý ngay cả trong môi trường có nhiễu đo lường cao tần, nhờ bản chất lọc nhiễu tự nhiên của cấu trúc Lyapunov tích phân. Từ các kết quả đạt được, có thể nhận thấy việc lựa chọn bộ điều khiển cần dựa trên yêu cầu cụ thể của hệ thống và điều kiện vận hành.

Hướng nghiên cứu tương lai: Kịch bản nhiễu đo lường cho thấy các tín hiệu phản hồi cao tần có thể ảnh hưởng đến chất lượng tín hiệu điều khiển của hệ phi tuyến. Do đó, hướng nghiên cứu tiếp theo nên tập trung vào việc tích hợp thuật toán với các bộ quan sát trạng thái hoặc bộ lọc nhiễu gọn nhẹ. Đồng thời, từ nền tảng đánh giá mô phỏng này, bước tiến tiếp theo là việc triển khai thuật toán trên các hệ thống vật lý có tài nguyên tính toán hạn chế nhằm khẳng định hoàn toàn giá trị ứng dụng thực tiễn của phương pháp. Bên cạnh đó, việc áp dụng các thuật toán tối ưu hóa có cấu trúc như Giải thuật di truyền (GA) hoặc tối ưu hóa bầy đàn (PSO) kết kết hợp cùng mạng nơ-ron (RBFNN) được xác định là một định hướng đi có giá trị. Sự kết hợp này hứa hẹn sẽ tự động hóa quá trình chỉnh định tham số và nâng cao năng lực bù trừ các thành phần bất định phi tuyến chưa biết, qua đó tối ưu hóa toàn diện hiệu năng và tính bền vững của hệ thống trong các điều kiện vận hành phức tạp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Dawson, D. M., Qu, Z., Lewis, F. L. & Dorsey, J. F. (1998). Robust control for the tracking of robot motion. *International Journal of Control*, *70*(5), 703–732.

Đức, T. M., Tài, V. M., Minh, P. Q., Trung, N. Đ., Thống, V. H. Th., Thể, T. N. H., Đạt, L. Đ., Vương, N. L., Khang, T. A., & Hoàng, P. C. (2023). Điều khiển swing-up và cân bằng hệ con lắc ngược quay áp dụng bộ điều khiển LQR-based ANFIS. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Trường Đại học Bình Dương*, *6*(1), 137–146. https://doi.org/10.56097/binhduonguniversityjournalofscienceandtechnology.v6i1.96

Feng, Y., Yu, X. & Han, F. (2013). On nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear systems. *Automatica*, *49*(6), 1715–1722. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.01.051

Irfan, S., Mehmood, A., Razzaq, M. T. & Iqbal, J. (2018). Advanced sliding mode control techniques for inverted pendulum: modelling and simulation. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 21, 753–764. https://doi.org/10.1016/j.jestch.2018.06.010

Irfan, S., Zhao, L., Ullah, S., Mehmood, A., & Butt, M. F. U. (2024). Control strategies for inverted pendulum: A comparative analysis of linear, nonlinear, and artificial intelligence approaches. *PLOS ONE*, *19*(1), e0298093. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0298093

Khanh, N. V., Hảo, N. V., & Phong, N. N. (2014). Điều khiển cân bằng con lắc ngược sử dụng bộ điều khiển cuốn chiếu. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, (31), 18-25..

Krstić, M., Kanellakopoulos, I., & Kokotović, P. (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. New York: John Wiley & Sons.

Nguyen, C. X., Tran, T. H., Pham, T. X., & Le, K. M. (2021). Design of control laws for rotary inverted pendulum based on LQR and Lyapunov function. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1029, 1–8. https://doi.org/10.1088/1757-899X/1029/1/012021

Nguyen, T. H., & Nguyen, C. A. (2025). Thiết kế các bộ điều khiển cho con lắc ngược quay. *Journal of Measurement, Control and Automation*, *29*(2), 9–17. https://doi.org/10.64032/mca.v29i2.303

Pathak, V. K., & Paliwal, S. (2017). Analysis & control of inverted pendulum system using PID controller. *International Journal of Engineering Research and Application*, *7*(5, Part-4), 01–04. https://doi.org/10.9790/9622-0705040104

Pham, D. B., Dao, Q. T., Bui, N. T., & Nguyen, T. V. A. (2024). Robust-optimal control of rotary inverted pendulum control through fuzzy descriptor-based techniques. *Scientific Reports*, 14, 5593. https://doi.org/10.1038/s41598-024-56202-2

Prasad, L. B., Tyagi, B. H., & Gupta, O. (2014). Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using PID controller and LQR: performance analysis without and with disturbance input. *International Journal of Automation and Computing*, *11*(6), 661–670. https://doi.org/10.1007/s11633-014-0818-1

Slotine, J.-J. E., & Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.

Utkin, V. I. (1992). *Sliding modes in control and optimization*. Berlin: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-84379-2

Xian, B., Dawson, D. M., de Queiroz, M. S., & Chen, J. (2004). A continuous asymptotic tracking control strategy for uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *49*(7), 1206–1211. https://doi.org/10.1109/TAC.2004.831148