Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên Đồng bằng sông Cửu Long
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2026.187

MÔ HÌNH LÃI ĐÔI: LUẬT SỐ LỚN VÀ MOMENT BẬC CAO

Trịnh Hữu Nghiệm[1,*] và Lâm Hoàng Chương[2]
[1]Khoa Cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ, Việt Nam
[2]Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam
*Tác giả liên hệ (Corresponding author): thnghiem27@gmail.com

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 17/05/2026
Sửa bài (Revised): 10/06/2026
Duyệt đăng (Accepted): 23/08/2026

Title: *The double profit model: The law of large numbers and higher-order moments*

Author(s): *Trinh Huu Nghiem[1,*] and Lam Hoang Chuong[2]*

Affiliation(s): *[1]Faculty of Basic Sciences, Nam Can Tho University, Viet Nam; [2]College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam*

TÓM TẮT

Bài báo này được thực hiện với mục đích nghiên cứu tính chất tiệm cận của mô hình "lãi đôi" trong lý thuyết xác suất dưới điều kiện xác suất thắng tổng quát $a \in (0,1)$. Trên cơ sở kết quả đã công bố về định lý giới hạn trung tâm tại giá trị tới hạn $a = 1/3$, việc khảo sát đã được tập trung mở rộng để thiết lập luật số lớn cho trường hợp $a \neq 1/3$. Đặc biệt, đóng góp khoa học cốt lõi của bài báo là việc xác định và chứng minh thành công hành vi giới hạn của dãy các moment bậc cao của quá trình lợi nhuận khi số lần giao dịch đủ lớn. Các kết quả đạt được góp phần hoàn thiện bức tranh định lượng toàn diện về cấu trúc động lực và sự biến động thống kê của mô hình lãi đôi tổng quát.

Từ khóa: *Bước đi ngẫu nhiên, công thức Jacob-Bernoulli, Luật số lớn, toán tử Markov*

ABSTRACT

This paper investigates the asymptotic properties of the "double profit" model in probability theory under a generalized winning probability $a \in (0,1)$. Building upon the previously established Central Limit Theorem at the critical threshold $a \neq 1/3$, this study extends the analysis to establish the Law of Large Numbers for the case where $a \neq 1/3$. Crucially, the core scientific contribution of this work lies in explicitly determining and proving the limiting behavior of the sequence of higher-order moments of the return process given a sufficiently large number of trades. These findings complement and complete the quantitative description of the statistical fluctuations and dynamical structures inherent in the generalized double profit model.

Keywords: *Jacob-Bernoulli's formula, law of large numbers, Markov operator, random walk*

1. GIỚI THIỆU

Trong thị trường tài chính, đặc biệt là giao dịch cổ phiếu, thị trường hàng hóa, tiền tệ hay thị trường tương lai, … ưu tiên hàng đầu của các nhà giao dịch chuyên nghiệp là "sống sót" hay không bị phá sản. Nếu rủi ro được kiểm soát, một mô hình có lợi nhuận trung bình dương dù là nhỏ cũng có thể tạo ra lợi nhuận lớn nhờ vào sức mạnh của thời gian và số lượng giao dịch. Taleb (2023) đã từng đề cập đến việc tối đa hóa lợi nhuận mà không quan tâm đến xác suất sống sót là một sai lầm chết người. Theo ông, một chiến lược có lợi nhuận cao nhưng có rủi ro phá sản dù chỉ 1% cuối cùng cũng dẫn đến sự

sụp đổ hoàn toàn. Sự sống sót là điều kiện tiên quyết duy nhất cho lợi nhuận. Kể cả Ed Seykota là một huyền thoại về giao dịch theo xu hướng, ông hiểu rất rõ về kỳ vọng toán học. Ông cũng đã từng nói tại một buổi phỏng vấn được thuật lại trong Schwager (2018) như sau "Các yếu tố của việc giao dịch tốt bao gồm: (1) Cắt lỗ, (2) Cắt lỗ, và (3) Cắt lỗ. Nếu anh có thể tuân thủ ba nguyên tắc này, anh sẽ có cơ hội" (tr. 196). Theo ông, nếu bạn sống sót đủ lâu trên thị trường thì bạn có thể cho phép quy luật số lớn hoạt động theo hướng có lợi cho mình. Cả hai ông cùng với rất nhiều nhà giao dịch thành công khác đều có chung một "giao lộ tư duy" là sự kết hợp giữa lợi nhuận trung bình dương (Positive Expectancy) và luật yếu số lớn (Weak Law of Large Numbers). Vấn đề được đặt ra ở đây là khi có một mô hình (chiến lược) giao dịch, ta cần xác định mô hình này có cho ra lợi nhuận trung bình dương và có tuân theo luật yếu số lớn không?

Trong thực tế, họ thường chọn các mô hình giao dịch sao cho có tỉ lệ lợi nhuận/rủi ro cao (2/1 hoặc 3/1 hoặc 5/1). Ở đây, chúng ta giả sử tỉ lệ lợi nhuận/rủi ro sau mỗi lần giao dịch là con số không đổi 2/1 với xác suất tương ứng như sau:

+ Thắng sẽ nhận thêm 2 đồng với xác suất α $(0 < \alpha < 1)$,

+ Thua sẽ mất đi 1 đồng với xác suất $1 - \alpha$.

Ở trong Chương và Nghiệm (2025), mô hình như vậy được gọi là mô hình "lãi đôi". Tuy nhiên, xác suất khi ấy tương ứng là 1/3 và 2/3 với kết quả đạt được là sự hội tụ về phân phối chuẩn với kỳ vọng bằng 0. Bằng cách xét với xác suất tổng quát hơn, chúng tôi tìm được câu trả lời thỏa đáng cho vấn đề đã đề cập ở trên.

Đặt $X_0 = 0$ là lợi nhuận ban đầu và X_n là lợi nhuận có được sau lần thực hiện giao dịch thứ n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó $(X_n)_{n\geq 0}$ là quá trình ngẫu nhiên hay bước đi ngẫu nhiên với tập giá trị nguyên $\mathbb{Z}$. Giả sử sau lần giao dịch thứ n, lợi nhuận có được là $X_n = k$ $(k \in \mathbb{Z})$, xác suất chuyển tương ứng là

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k + 2 | X_n = k) = \alpha,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k - 1 | X_n = k) = 1 - \alpha.$$

Toán tử Markov $\mathcal{P}$ tương ứng với quá trình ở trên: $\mathcal{P}f(X_n) = \mathbb{E}[(f(X_{n+1})|X_n)]$ với f là đa thức trên $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{E}(X)$ là kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X. Bằng cách tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phụ thuộc, công thức dưới đây hoàn toàn được xác định

$$\mathcal{P}f(k) = \alpha f(k + 2) + (1 - \alpha)f(k - 1). \quad (1)$$

Từ đẳng thức (1), kết quả được rút ra dưới đây.

Định lý 1.1 Cho $(X_n)_{n\geq 0}$ là bước đi ngẫu nhiên đã giới thiệu ở trên. Khi đó,

● Nếu $\alpha = \frac{1}{3}$ thì $(X_n)_{n\geq 0}$ hội tụ theo phân phối về phân phối chuẩn $\mathcal{N}(0,2)$ với trung bình bằng 0 và phương sai bằng 2. Cụ thể,

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,2) \text{ khi } n \to \infty.$$

Trong đó, $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ là ký hiệu cho sự hội tụ theo phân phối của các biến ngẫu nhiên.

●Nếu $\alpha \neq \frac{1}{3}$ thì $(X_n)_{n\geq 0}$ thỏa mãn Luật yếu số lớn. Chi tiết hơn là

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} (3\alpha - 1) \text{ khi } n \to \infty.$$

Trong đó, $\xrightarrow{\mathrm{P}}$ là ký hiệu cho sự hội tụ theo xác suất của các biến ngẫu nhiên.

Kết quả trong trường hợp đầu $\left(\alpha = \frac{1}{3}\right)$ đã được chứng minh chi tiết trong Chương và Nghiệm (2025). Do đó, chúng ta chỉ cần chứng minh trường hợp thứ hai $\left(\alpha \neq \frac{1}{3}\right)$. Mặc dù có nhiều phương pháp được dùng để chứng minh các định lý giới hạn như: phương pháp hàm đặc trưng (Brown, 1971), phương pháp toán tử (Trotter, 1959), phương pháp xấp xỉ martingale (Kozlov, 1985; Alili, 1999; Mathieu, 2008),… nhưng trong bài báo này, việc chứng minh được thực hiện dựa theo phương pháp xác định giới hạn phương sai của bước đi ngẫu nhiên trong môi trường ngẫu nhiên được giới thiệu lần đầu bởi Depauw and Derrien (2009) thông qua việc xác định các moment. Việc xác định các moment là quan trọng, do đó nhóm tác giả xin được giới thiệu sơ lược về lịch sử hình thành và phát triển phương pháp này. Nhà toán học vĩ đại người Nga Chebyshev (1821–1894) lần đầu giới thiệu phương pháp moment trong Tchébichef (1887) để chứng minh định lý giới hạn trung tâm cho mô hình xác suất thông qua bất đẳng thức nổi tiếng mang tên mình, Bất đẳng thức Chebyshev (Chebyshev's Inequality). Sau đó, trong cuốn "Probability and Measure" (Billingsley, 1995), Patrick Billingsley (1925–2011) là một nhà toán học, nhà thống kê và cũng là diễn viên người Mỹ nổi tiếng đã giới thiệu phương pháp này để chứng minh định lý giới hạn trung tâm thông qua việc xét giới hạn moment mọi bậc của dãy các biến ngẫu nhiên. Kể từ đó cho đến nay, đã có rất nhiều nghiên cứu liên quan đến phương pháp này. Nếu muốn tìm hiểu sâu hơn thì ngoài hai tài liệu kinh điển vừa giới thiệu ở trên bạn đọc có thể tham khảo thêm các tài liệu

như: Depauw and Derrien (2009), Norris (1998), Ross (2010), Chương và ctv. (2021), Chương và ctv. (2024).

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Để chứng minh Định lý 1.1, kỹ thuật truy hồi với các giá trị rời rạc được áp dụng nhằm xác định được hàm đa thức f trên tập $\mathbb{Z}$ với điều kiện cho trước (Mệnh đề 3.1). Từ đó, giới hạn các moment bậc $k, k \in \mathbb{N}^*$ được xác định (Mệnh đề 3.2). Cuối cùng là chứng minh Định lý 1.1. Trước tiên, một số tính chất dưới đây cần được giới thiệu để hỗ trợ cho việc chứng minh Mệnh đề 3.1 và Mệnh đề 3.2.

Bổ đề 2.1. *Cho $Q(x)$ là một hàm đa thức xác định trên $\mathbb{Z}$. Khi đó, phương trình*

$$f(m+1) - u.f(m) = Q(m), \quad (2)$$

với $f(0) = 0$ và $u \in \mathbb{R}$, có nghiệm

$$f(m) = \begin{cases} f_1(m) \text{ nếu } & |u| < 1, \\ f_2(m) \text{ nếu } & |u| > 1, \\ f_3(m) \text{ nếu } & u = 1, m > 0, \\ f_4(m) \text{ nếu } & u = 1, m < 0, \\ f_5(m) \text{ nếu } & u = -1, m > 0, \\ f_6(m) \text{ nếu } & u = -1, m < 0. \end{cases}$$

ở đó, $f_1(m) = \sum_{i=0}^{+\infty} u^i.Q(m-i)$,

$$f_2(m) = -\frac{1}{u}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{u}\right)^i.Q(m+i),$$

$$f_3(m) = \sum_{i=0}^{m-1} Q(i),$$

$$f_4(m) = -\sum_{i=1}^{-m} Q(-i),$$

$$f_5(m) = (-1)^{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i.Q(i),$$

$$f_6(m) = (-1)^{-m}\sum_{i=1}^{-m}(-1)^i.Q(-i).$$

Chứng minh

Ta xét các trường hợp sau:

● $|u| < 1$, từ (2), ta có thể suy ra phương trình:

$$f(m) = u.f(m-1) + Q(m).$$

Kỹ thuật đệ quy với $m-1, m-2, \ldots, -\infty$ được áp dụng cho phương trình này, kết hợp với $|u| < 1$ và hàm $f(m)$ là một hàm đa thức, ta suy ra được:

$$f(m) = f_1(m) = \sum_{i=0}^{+\infty} u^i.Q(m-i).$$

● $|u| > 1$, hai vế của (2) được chia cho u và chuyển vế các hạng tử thích hợp, ta được:

$$f(m) = \frac{1}{u}.f(m+1) - \frac{1}{u}Q(m).$$

Đệ quy phương trình này với $m+1, m+2, \ldots, +\infty$, ta rút gọn được kết quả dưới đây:

$$f(m) = f_2(m) = -\frac{1}{u}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{u}\right)^i.Q(m+i).$$

● $u = \pm 1$, ở trường hợp này ta cần đệ quy phương trình (2) với $0, 1, 2, \ldots, m$ $(m > 0)$ và $-1, -2, \ldots, m$ $(m < 0)$ kết hợp với điều kiện $f(0) = 0$, sau đó thu gọn, ta được:

$$f(m) = \begin{cases} f_3(m) \text{ nếu } & u = 1, m > 0, \\ f_4(m) \text{ nếu } & u = 1, m < 0, \\ f_5(m) \text{ nếu } & u = -1, m > 0, \\ f_6(m) \text{ nếu } & u = -1, m < 0. \end{cases}$$

Bổ đề đã được chứng minh.■

Chú ý 2.2. *Cho phương trình*

$$x^2 + x - \frac{1-\alpha}{\alpha} = 0. \quad (3)$$

Khi đó, (3) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

● $x_1 < -2$ và $1 < x_2$ nếu $0 < \alpha < \frac{1}{3}$,

● $-2 < x_1 < -1$ và $0 < x_2 < 1$ nếu $\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

Định nghĩa 2.3 (Hàm đa thức logarit). *Chuỗi lũy thừa có dạng*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \cdots$$

được gọi là hàm đa thức logarit hay chuỗi Dirichlet. Hàm đa thức này được ký hiệu là $Li_s(z)$. Ta thấy rằng hàm đa thức logarit luôn xác định với $|z| < 1$.

Hai bổ đề ngay dưới đây được chứng minh trong tài liệu Graham et al. (1994).

Bổ đề 2.4 (Jacob-Bernoulli) *Tổng lũy thừa*

$$\sum_{i=1}^{m} i^k = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^j B_j m^{k+1-j}$$

trong đó B_j là hệ số Bernoulli thứ j, đó là

$$B_j = \sum_{v=o}^{j}\frac{1}{v+1}\sum_{r=0}^{v}(-1)^r C_j^r r^j.$$

Bổ đề 2.5. *Chuỗi số sau luôn hội tụ*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^j\rho^k = \frac{1}{\rho}Li_{-j}(\rho),$$

với mọi số thực $\rho \in (0;\ 1)$.

3. CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ 1.1

Tiếp theo dưới đây, hai mệnh đề rất quan trọng cần được giới thiệu và chứng minh chặt chẽ nhằm hỗ trợ cho việc chứng minh Định lý 1.1.

Mệnh đề 3.1. *Cho* $f_k(m)$ *là hàm đa thức trên tập số nguyên* $\mathbb{Z}$ *thỏa mãn phương trình*

$$\mathcal{P}f_k(m) - f_k(m) = m^{k-1},\ (4)$$

với điều kiện ban đầu $f_k(0) = 0,\ k \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó, phương trình (4) có nghiệm*

$$f_k(m) = \frac{1}{3\alpha - 1}.\frac{m^k}{k} + \mathrm{O}(m^{k-1}).$$

Chứng minh

Thay vế phải của đẳng thức (1) vào phương trình (4), ta được đẳng thức dưới đây

$$\alpha f_k(m+2) - f_k(m) + (1-\alpha)f_k(m-1) = m^{k-1},$$

Đặt $P_k(m) = f_k(m+1) - f_k(m)$, thay vào phương trình này và chia hai vế phương trình vừa đạt được cho α, ta được phương trình sau

$$P_k(m+1) + P_k(m) - \frac{1-\alpha}{\alpha}P_k(m-1) = \frac{1}{\alpha}m^{k-1}.$$

Tiếp tục thay x_1, x_2 trong chú ý 2.2 một cách thích hợp vào phương trình này, từ đó phương trình dưới đây hoàn toàn được xác định:

$$P_k(m+1) - (x_1+x_2)P_k(m) + x_1x_2.P_k(m-1) = \tfrac{1}{\alpha}m^{k-1} \quad (5)$$

Bằng cách đặt

$$Q_k(m) = P_k(m+1) - x_2P_k(m),\ (6)$$

phương trình (5) trở thành

$$Q_k(m) - x_1Q_k(m-1) = \tfrac{1}{\alpha}m^{k-1}.\ (7)$$

Trước tiên, ta xét trường hợp $0 < \alpha < \frac{1}{3}$. Khi đó, $|x_1| > 1$ và $|x_2| > 1$, theo bổ đề 2.1 thì phương trình (7) có nghiệm tương ứng là

$$Q_k(m) = -\frac{1}{\alpha x_1}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_1}\right)^i (m+1+i)^{k-1}.$$

Khai triển nhị thức Newton trong tổng của vế phải phương trình này, cùng với kết quả có trong Bổ đề 2.5, dạng rút gọn dưới đây được xác định:

$$Q_k(m) = \frac{-1}{\alpha(x_1-1)}m^{k-1} + \mathrm{O}(m^{k-2}).$$

Bằng cách biến đổi tương tự, sau đó thay giá trị của $Q_k(m)$ đã tìm được ở trên và thu gọn, phương trình (6) có nghiệm là

$$P_k(m) = \frac{1}{3\alpha - 1}m^{k-1} + \mathrm{O}(m^{k-2}).$$

Theo Bổ đề 2.1, ta xác định được nghiệm của phương trình $P_k(m) = f_k(m+1) - f_k(m)$ là

$$f_k(m) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m-1} P_k(i) & \text{nếu } m > 0, \\ -\sum_{i=1}^{-m} P_k(-i) & \text{nếu } m < 0. \end{cases}$$

Kết hợp với Bổ đề 2.4, $f_k(m)$ được hoàn toàn xác định cụ thể với dạng viết gọn dưới đây:

$$f_k(m) = \frac{1}{3\alpha - 1}.\frac{m^k}{k} + \mathrm{O}(m^{k-1}).$$

Trường hợp còn lại ($\frac{1}{3} < \alpha < 1$). Khi đó, $|x_1| > 1$ và $|x_2| < 1$. Bằng cách sử dụng các phép biến đổi tương tự như trong trường hợp đầu, tuy có chút khác biệt nhưng sự khác biệt này là không đáng kể, ta cũng có kết quả tương tự như trường hợp trước.

Tóm lại, ta đã chứng minh được:

$$f_k(m) = \frac{1}{3\alpha - 1}.\frac{m^k}{k} + \mathrm{O}(m^{k-1}),$$

$$\alpha \in (0;1)\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}, m \in \mathbb{Z}.\ \blacksquare$$

Mệnh đề 3.2. $(X_n)_{n\geq 0}$ *là bước đi ngẫu nhiên. Khi đó, với* $\alpha \neq \frac{1}{3}$, *ta có giới hạn dưới đây được xác định*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{n}\right)^k\right] = (3\alpha-1)^k, k \geq 1.$$

Chứng minh

Phương pháp quy nạp được áp dụng cho việc chứng minh mệnh đề này. Trước hết, ta cần lấy kỳ vọng hai vế của phương trình (4) với biến được xét là X_n, ta được

$$\mathbb{E}[f_k(X_{n+1})] - \mathbb{E}[f_k(X_n)] = \mathbb{E}(X_n^{k-1}),(8)$$

ở đó, một tính chất thông dụng của kỳ vọng có điều kiện đã được áp dụng, cụ thể là

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n]\} = \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})].$$

Với $k = 1$. Phương trình (8) trở thành

$$\mathbb{E}[f_1(X_{n+1})] - \mathbb{E}[f_1(X_n)] = 1.$$

Đệ quy phương trình này theo $0,1,2 \ldots, n$, kết hợp với các điều kiện $X_0 = 0$ và $f_1(0) = 0$, ta được

$$\mathbb{E}[f_1(X_n)] = n.$$

Vì $f_1(X_n) = \frac{1}{3\alpha-1}X_n$ được suy ra từ Mệnh đề 3.1, ta có được kỳ vọng của X_n như sau

$$\mathbb{E}(X_n) = (3\alpha - 1)n.$$

Giả sử $\mathbb{E}(X_n^k) = (3\alpha - 1)^k n^k + O(n^{k-1}), k \geq 1$. Khi đó, bằng cách đệ quy (8) như trên, ta được

$$\mathbb{E}[f_{k+1}(X_n)] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_i^k).$$

Giá trị của $\mathbb{E}(X_n^k)$ được thay vào và sử dụng kết quả của Bổ đề 2.4, ta ước lượng được kỳ vọng dưới đây:

$$\mathbb{E}[f_{k+1}(X_n)] = (3\alpha - 1)^k \frac{n^{k+1}}{k+1} + O(n^k).$$

Với $f_{k+1}(m) = \frac{1}{3\alpha-1} \cdot \frac{m^{k+1}}{k+1} + O(m^k)$ có được từ Mệnh đề 3.1, phương trình này được biến đổi thành

$$\mathbb{E}(X_n^{k+1}) = (3\alpha - 1)^{k+1} n^{k+1} + O(n^k).$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp, kết quả dưới đây được chứng minh hoàn tất

$$\mathbb{E}(X_n^k) = (3\alpha - 1)^k n^k + O(n^{k-1}), k \geq 1, n \geq 0.$$

Bằng cách chia hai vế của phương trình trên với n^k sau đó lấy giới hạn với $n \to +\infty$, Mệnh đề 3.2 được chứng minh triệt để.■

Nhận xét 3.3

Với $k = 1, k = 2$, Mệnh đề 3.2 cho ra được hai kết quả cụ thể sau

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right) = (3\alpha - 1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{n}\right)^2\right] = (3\alpha - 1)^2.$$

Từ hai kết quả này cùng với việc áp dụng bất đẳng thức Chebyshev có trong tài liệu Billingsley (1995), ta dễ dàng suy ra được

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} (3\alpha - 1) \text{ khi } n \to \infty.$$

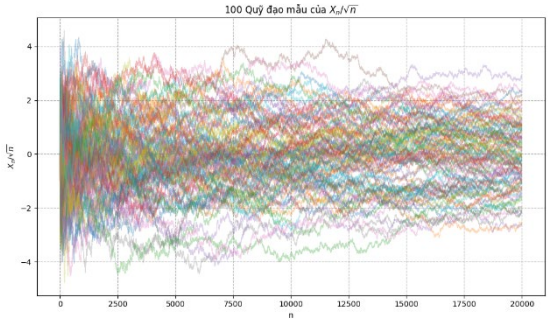
Như vậy, Định lý 1.1 đã hoàn toàn được chứng minh.■

4. MÔ PHỎNG MONTE CARLO KIỂM CHỨNG SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY $(X_n)_{n\geq 0}$

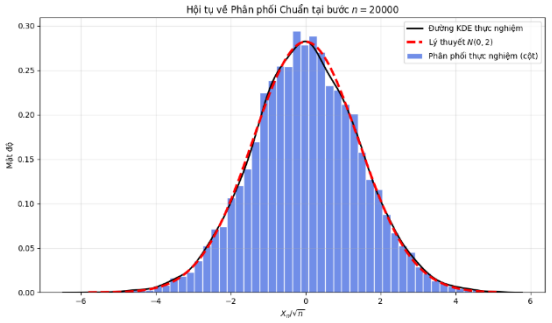
Để xác nhận tính đúng đắn bằng thực nghiệm, chúng tôi triển khai mô phỏng Monte Carlo dựa trên nền tảng Python thông qua thư viện Numpy cho hai kết quả có trong Định lý 1.1.

4.1. Định lý giới hạn trung tâm

Hình 1 là kết quả của việc mô phỏng quỹ đạo của $X_n/\sqrt{n}$ với số bước $n = 20.000$ và số quỹ đạo 100 (thực tế tính toán đến 10.000 quỹ đạo) cùng với mức xác suất thắng $\alpha = 1/3$. Hình ảnh nhấn mạnh rằng khi n càng lớn thì biên độ dao động của các quỹ đạo càng ổn định và co hẹp dần trong phạm vi nhất định (chủ yếu dao động trong $[-4; 4]$).



Hình 1. Mô phỏng quỹ đạo mẫu của $X_n/\sqrt{n}$



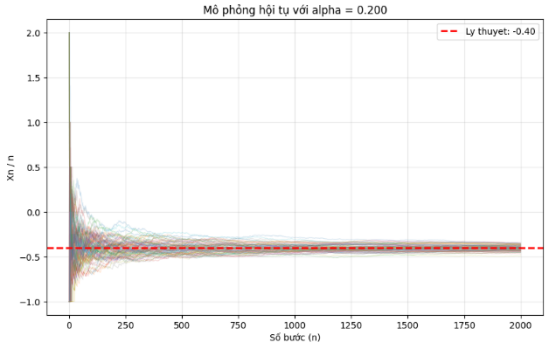
Hình 2. Mô phỏng phân phối chuẩn

Với xác suất thắng $\alpha = 1/3$, 10.000 quỹ đạo và xét tại $n = 20.000$, Hình 2 là kết quả của việc mô phỏng mật độ phân phối thực nghiệm (cột màu xanh) và hàm mật độ xác suất (đường KDE màu đen – đường ước lượng hàm mật độ theo phương pháp hạt nhân) so sánh với hàm mật độ giới hạn (đồ thị hàm mật độ của phân phối $\mathcal{N}(0,2)$ hay hàm mật độ lý thuyết). Kết quả này cho thấy đồ thị của hàm mật

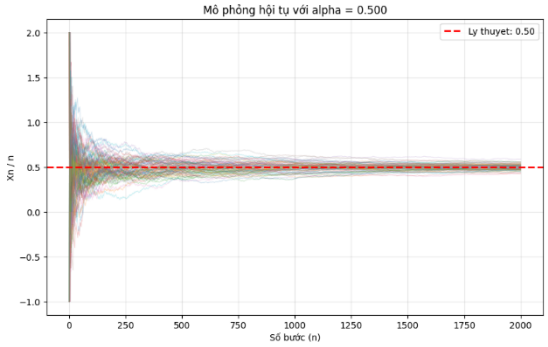
độ gần như trùng khớp với đồ thị hàm mật độ giới hạn (đường nét đứt màu đỏ). Điều này xác thực một cách trực quan cho sự hội tụ của dãy $(X_n)_{n\geq 0}$.

4.2. Luật số lớn

Hình 3 là kết quả của việc mô phỏng X_n/n với $n = 20.000$, số quỹ đạo là 500 và $\alpha = 0{,}2$ (mô hình cho lợi nhuận trung bình âm). Kết quả này cho thấy khi n càng lớn thì các quỹ đạo hội tụ chặt về một giá trị, cụ thể là $-0{,}4$ (giá trị của $3\alpha - 1$). Điều này cho ta cái nhìn trực quan rằng $(\mathrm{X_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ thỏa mãn Luật yếu số lớn. Ta cũng có kết quả tương tự cho trường hợp $\alpha = 0{,}5$ (mô hình cho lợi nhuận trung bình dương) được thể hiện trong Hình 4.

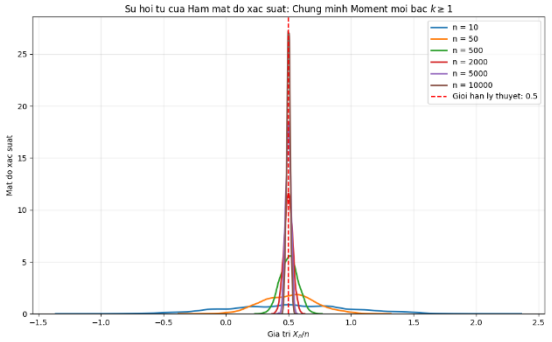


Hình 3. Mô phỏng hội tụ với $\alpha = 0,2$



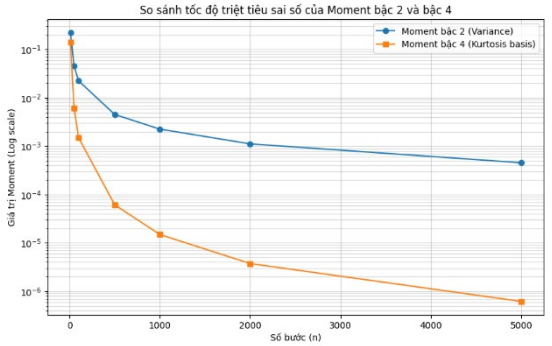
Hình 4. Mô phỏng hội tụ với $\alpha = 0,5$

Để kiểm chứng cho sự hội tụ theo moment bậc cao, việc mô phỏng hàm mật độ xác suất với từng bước nhảy n được thực hiện cùng 1.000 quỹ đạo và so sánh với đường trung bình lý thuyết 0,5. Kết quả được thể hiện trong Hình 5 nói lên rằng hàm mật độ xác suất có xu hướng bám sát mạnh vào đường trung bình lý thuyết (đường nét đứt màu đỏ) khi n càng lớn. Đặc biệt, tại $n = 10$ hàm mật độ có dạng bẹt ra hai phía và lõm chõm nhiều đỉnh cho thấy các giá trị phân tán rộng, chưa ổn định. Trong khi tại $n = 10.000$ hàm mật độ có cột nhọn rất cao và gần như không có đuôi, kết quả thực nghiệm này nói rằng $(\mathrm{X_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ không chỉ hội tụ về một điểm (0,5) mà còn cho thấy tốc độ hội tụ nhanh và bó chặt các giá trị ngoại lai, tức là tính ổn định cao. Đó chính là minh chứng trực quan của sự hội tụ theo moment bậc cao.



Hình 5. Hội tụ hàm mật độ của X_n/n về 0,5

Bên cạnh đó, Hình 6 là kết quả của việc mô phỏng so sánh tốc độ triệt tiêu sai số của moment bậc 2 và moment bậc 4. Cụ thể, với mức xác suất $\alpha = 0{,}5$ và số quỹ đạo được chọn là 20.000 tại 7 giá trị tăng dần của n, đường moment bậc 4 (màu cam) thấp hơn đường moment bậc 2 (màu xanh dương). Đặc biệt, khi n càng lớn thì tốc độ hội tụ về 0 của moment bậc 4 nhanh hơn rất nhiều so với moment bậc 2, chẳng hạn tại $n = 5.000$ moment bậc 2 có giá trị 0.00045013, trong khi đó moment bậc 4 có giá trị 0.00000061 thấp hơn rất nhiều.



Hình 6. So sánh sai số của hai moment

Kết quả thực nghiệm thông qua mô phỏng Monte Carlo cho thấy sự nhất quán với Định lý 1.1 về việc thỏa mãn của bước đi ngẫu nhiên $(\mathrm{X_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ với Định lý giới hạn trung tâm và Luật yếu số lớn. Hơn thế nữa, thực nghiệm còn cho thấy sức mạnh của hội tụ theo moment bậc k ($k \geq 1$) với tốc độ triệt tiêu giá trị ngoại lai rất nhanh, tức là mô hình sẽ nhanh đạt mức ổn định khi n tăng dần.

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, các kỹ thuật thông dụng đã được sử dụng như: nguyên lý quy nạp, kỹ thuật đệ quy, kỹ thuật giải phương trình sai phân cấp hai, …

kết hợp với Bổ đề Jacob-Bernoulli, hàm $Li_s(z)$, … đã giải quyết triệt để vấn đề có trong Định lý 1.1. Bên cạnh đó, trong quá trình chứng minh, chúng tôi cũng đã tính được sự hội tụ của moment bậc $k, k \geq 1$, một kết quả khái quát hơn Định lý 1.1. Thêm vào đó, thông qua mô phỏng Monte Carlo trên nền tảng Python, kết quả thực nghiệm càng làm cho kết quả lý thuyết thêm phần sinh động và thuyết phục.

Giả sử nhà giao dịch có một chiến lược giao dịch với tỉ lệ lợi nhuận/rủi ro là 2/1, cùng với xác suất thắng là một hằng số α. Khi đó, thông qua Định lý 1.1 họ có thể xác nhận được mô hình của mình có cho lợi nhuận dương hay không? Có ổn định khi giao dịch với số lần n đủ lớn hay không? Đây coi như là bước kiểm định ban đầu. Từ đó, họ có thể tiết kiệm được thời gian, kinh tế, trước khi tung chiến lược của mình ra thị trường tài chính. Mặc dù bài báo đã đạt được những kết quả nhất định nhưng vẫn còn một số hạn chế vì chưa giải quyết được các vấn đề bao quát hơn như: việc tìm hiểu các tỷ lệ nhuận/rủi ro cao (3/1 hoặc 5/1) vẫn chưa được triển khai, việc nghiên cứu giả định nếu xác suất thắng không còn là một hằng số cố định cũng chưa được tiến hành. Do đó, các nghiên cứu tiếp theo khi được thực hiện có thể mở rộng theo những hướng này nhằm đánh giá toàn diện hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alili, S. (1999). Asymptotic behaviour for random walks in random environments. *Journal of Applied Probability, 36*, 334–349. https://doi.org/10.1239/jap/1032374457

Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure, Third Edition*. John Wiley, New York.

Brown, B. M. (1971). Martingale central limit theorems. *Ann. Math. Statist.*, *42*, 59 - 66. https://doi.org/10.1214/aoms/1177693494

Depauw, J., & Derrien, J. M. (2009). Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. *Comptes Rendus Mathematique*, *347*(7-8), 401–406. https://doi.org/10.1016/j.crma.2009.01.030

Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1994). *Concrete mathematics: a foundation for computer science, Second Edition*. Addison-Wesley Professional.

Kozlov, S. M. (1985). The averaging method and walks in inhomogeneous environments. *Uspekhi Mat. Nauk 40*, 61–120. https://doi.org/10.1070/RM1985v040n02ABEH003558

Chương, L. H., Lộc, T. P., Kim, L. M., & Tuyền, D. T. (2021). Định lý giới hạn trung tâm trong mô hình trò chơi công bằng. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, *57*(2), 39-43. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.036

Chương, L. H., Nghiệm, T. H., & Nhân, L. H. (2024). Moment bậc cao cho bước đi ngẫu nhiên trong không gian trạng thái rời rạc. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, *60*(CĐ Khoa học tự nhiên), 58-62. https://doi.org/10.22144/ctujos.2024.342

Chương, L. H., & Nghiệm, T. H. (2025). Định lý giới hạn trung tâm cho mô hình lãi đôi. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, *14*(04S), 1-12. https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1504

Mathieu, P. (2008). Quenched invariance principles for random walks with random conductances. *Journal of Statistical Physics*, *130*, 1025–1046. https://doi.org/10.1007/s10955-007-9465-z

Norris, J. R. (1998). *Markov chains*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511810633

Ross, S. M. (2010). *Introduction to Probability Models*. Elsevier Inc. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-375686-2.00007-8

Schwager, J. D. (2018). *Phù thủy chứng khoán: Thế hệ mới* (Trường, P. Q., dịch). NXB Lao động - Xã hội.

Taleb, N. N. (2023). *Trò đùa của sự ngẫu nhiên: Vai trò ẩn giấu của xác suất trong cuộc sống và trên thị trường tài chính* (Nam, L. V. K., dịch). NXB Công Thương.

Tchébichef, P. L. (1887). Sur la valeur moyenne des sommes de carrés des écarts des valeurs des fonctions de leurs valeurs moyennes [On the mean value of the sums of the squares of the deviations of function values from their mean values]. Journal *de Mathématiques Pures et Appliquées*, *3*(4), 237-248.

Trotter, H. F. (1959). An elementary proof of the central limit theorem. *Arch. Math (Basel)*, *10*(1), 226-234. https://doi.org/10.1007/BF01240790